Matematik X

Skriftlig prøve, 11. maj 1994 (1 3/4 time).

Opgave 1 (2 point)

Skriv to af mængderne $0,1,2,3$ og 4 på "potensmængdeform", dvs. på formen $\mathcal{P}(x)$ for en eller anden mængde x.

Opgave 2 (1+2 = 3 point)

Lad x,y og z være mængder.

(i). Skriv udsagnet $z = \{x\}$ på en form, hvori der alene indgår elementære udsagn af formen $a \in b$ eller $a = b$ (hvor a og b enten er en af mængderne x,y eller z eller en mængdevariabel) i kombination med de logiske konnektiver $\neg, \vee$ og $\wedge$ og alkvantoren $\forall$.

(ii). Skriv dernæst udsagnet $x = y$ på samme form som nævnt under (i), men helt uden brug af elementære udsagn på formen $a = b$.

Opgave 3 (1+1+1 = 3 point)

For ethvert $n \in \omega$ betegner vi med $\mathcal{P}_n(\omega)$ mængden af n-delmængder af ω, altså mængden af delmængder med n elementer. Mere formelt:

$$\mathcal{P}_n(\omega) = \{\, x \mid x \subseteq \omega \wedge |x| = n \,\}.$$

(i). Bestem, for ethvert $n \in \omega$, kardinaliteten $|\mathcal{P}_n(\omega)|$ af mængden $\mathcal{P}_n(\omega)$. (Husk tilfældet $n = 0$. Se eventuelt på tilfældene $n = 1$ og $n = 2$, før et generelt resultat udledes).

(ii). Bestem dernæst kardinaliteten af mængden af endelige delmængder af ω.

(iii). Bestem til slut kardinaliteten af mængden af uendelige delmængder af ω.

Opgave 4 (1+1+1 = 3 point)

I denne opgave ses på sum af ordinaltal. Der mindes om den rekursive definition indeholdt i de tre ligninger: $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + S(\beta_0) = S(\alpha + \beta_0)$ og, for et grænseordinaltal β, ligningen $\alpha + \beta = \sup\{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta \,\}$. (I sidste ligning er en skrivefejl rettet i forhold til det side AM 65 anførte).
(i). Bevis, at for alle $\alpha \in \mathbb{ON}$ og alle $\beta \in \mathbb{ON}$, gælder

$$\alpha + \beta \geq \beta.$$

 Opgave 4 fortsættes på side 2

Vejledning: Brug definitionsligningerne, og før beviset ved induktion i β.

(ii). Bevis, at for alle $\alpha \in \mathbb{ON}$ og alle $\beta \in \mathbb{ON}$ med $\beta > 0$, gælder

$$\alpha + \beta > \alpha.$$

(iii). Anfør et eksempel, der viser, at man ikke af $\alpha > 0$ kan slutte, at $\alpha + \beta > \beta$.

Opgave 5 (2 point)

(i). Lad $(X, \leq)$ være en ordnet mængde. Bevis, at $(X, \leq)$ er en velordning, hvis og kun hvis $(X, \leq)$ er en total ordning, for hvilken ethvert venstreafsnit er velordnet. (For en vilkårlig ordnet mængde $(X, \leq)$ defineres et *venstreafsnit* som en mængde af formen $V(x) = \{y \in X | y < x\}$ for et eller andet $x \in X$).

Opgave 6 (2+1+1+4 = 8 point)

Lad α være et ordinaltal > 0. Definér en brolægning $\mathcal{G}$ på $[0, \alpha[$ ved for enhver delmængde $G \subseteq [0, \alpha[$ at fastsætte følgende:

$$G \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall \beta \in G \ (\beta \text{ grænseordinaltal } \Rightarrow \exists \gamma < \beta :]\gamma, \beta] \subseteq G),$$

med andre ord, $G \in \mathcal{G}$ betyder, at der for ethvert grænseordinaltal $\beta \in G$ findes et “lille”interval af typen $]\gamma, \beta]$ (iøvrigt = $]\gamma, \beta + 1[$), helt indeholdt i G.

(i). Bevis, at $\mathcal{G}$ fastlægger en topologi på $[0, \alpha[$.

(ii). Bevis, at for $\alpha \leq \omega$, er $\mathcal{G}$ den diskrete topologi på $[0, \alpha[$.

(iii). Bevis, at for $\alpha > \omega$, er $\mathcal{G}$ *ikke* den diskrete topologi på $[0, \alpha[$.
Vejledning: $\{\omega\}$ er ikke åben.

(iv). Antag nu, at $\alpha = \omega_1$, det første over-tællelige ordinaltal. Bevis, at enhver strengt voksende følge på $[0, \omega_1[$ er konvergent i topologien $\mathcal{G}$, dvs., for enhver følge $(x_n)_{n \geq 1}$ på $[0, \omega_1[$ med $x_1 < x_2 < \cdots$ findes et $x < \omega_1$ således, at $x_n \to x$ for $n \to \infty$. *Bemærkning:* Resultatet gælder også under den svagere forudsætning, at $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, men det kan være en lettelse at antage, at $x_1 < x_2 < \cdots$.