Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik
4 timers skriftlig prøve
3. august 1999

Opgavesættet er på 2 sider og består af 5 enkeltopgaver. Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Man betragter differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x(\ln x + (\ln x)^2)$$

for funktioner $x(t)$ med positive værdier.

(a) Find den løsning (defineret på en omegn af $t = 0$), som antager værdien e for $t = 0$.

(b) Bestem løsningens størst mulige definitionsinterval.

(Vink: Man kan løse ligningen ved separation, og man kan anvende substitutionen $u = \ln x$.)

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der er givet et autonomt differentialligningssystem i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 4, \\ \dot{y} &= (x-1)y. \end{aligned}$$

(a) Bestem ligevægtspunkterne og deres stabilitetsforhold.

(b) Marker på en tegning fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de forskellige områder, planen inddeles i af nulpunktsmængderne for $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $g(x,y) = (x-1)y$.

(c) Idet det lukkede område M defineres ved

$$M = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 4 \,\},$$

skal man vise, at når $(x(t), y(t))$ er en løsning defineret på et interval $[t_0, t_1]$, og $(x(t_0), y(t_0)) \in M$, så er også $(x(t_1), y(t_1)) \in M$.

Opgave 3 (Vægt 20%)

Man betragter det todimensionale differensligningssystem

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \tfrac{1}{3}x_1(t) + \tfrac{1}{3}x_2(t) + 5, \\ x_2(t+1) &= \tfrac{1}{3}x_1(t) + \tfrac{1}{3}x_2(t) + 7, \end{aligned}$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

som også kan skrives som

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at systemet er stabilt.
(b) Find $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$, hvor $\mathbf{x}(t)$ er en vilkårlig løsning.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Løs følgende variationsproblem:

$$\text{Minimér} \int_0^1 e^{4x+2\dot{x}}\, dt, \text{ når } x(0) = 1,\ x(1) \geq 1.$$

Opgave 5 (Vægt 20%)

Man betragter et optimalt kontrolproblem

$$\begin{aligned} \text{Maksimér} \int_0^{10} (1-u^2)x\, dt \text{ under bibetingelserne} \\ \dot{x} = u^2 x, \\ x(0) = 1,\ x(10) \text{ er fri}, \\ u \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

(a) Vis, at et tilladt par $(x(t), u(t))$ må opfylde $x(t) \geq 1$ for $t \in [0, 10]$.
(b) Opstil de nødvendige betingelser, der fås fra maksimumsprincippet, for at et tilladt par er optimalt.
(c) Vis, at $\dot{p}(t) < 0$.
(d) Find en løsningskandidat.
(e) Vis, at denne løsningskandidat virkelig løser problemet.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra andre af opgavens spørgsmål selvom disse ikke er besvaret.