Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik
4 timers skriftlig prøve
8. juni 1999

Opgavesættet er på 2 sider og består af 5 enkeltopgaver. Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (Vægt 15%)

Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x,$$

der antager værdien 2 for $t = 0$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der er givet et autonomt differentialligningssystem i $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = (x+y)^2 - 1,$$
$$\dot{y} = (x-y)^2 - 1.$$

(a) Vis, at der er fire ligevægtsløsninger, i punkterne $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ og $D = (0,-1)$, og bestem deres stabilitetsforhold.
(b) Marker på en tegning fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de forskellige områder, planen inddeles i af nulpunktsmængderne for $f(x,y) = (x+y)^2 - 1$, $g(x,y) = (x-y)^2 - 1$.
(c) Lad $(x(t), y(t))$ være en løsning defineret på et interval I. Vis, at hvis $[t_0, t_1] \subseteq I$, og $(x(t), y(t))$ ligger i det indre af trekanten ABD for $t \in [t_0, t_1[$, mens $(x(t_1), y(t_1))$ ligger på randen af trekanten, så må $(x(t_1), y(t_1))$ tilhøre siden BD.

Opgave 3 (Vægt 20%)

Man betragter differensligningen

$$x_{t+2} - ax_{t+1} + \tfrac{1}{4}(a-1)x_t = 2^t,$$

hvor a er et givet reelt tal.

(a) Opskriv den karakteristiske ligning.
(b) Beregn, for hvilke værdier af a, problemet er globalt asymptotisk stabilt.
(c) Find den generelle løsning i tilfældet $a = 0$, og undersøg opførselen for $t \to \infty$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 20%)

Man betragter variationsproblemet

$$\text{Minimér} \int_0^1 (x^2 + 2t^2x + \dot{x}^2)\,dt, \ \text{når } x(0) = 1,\ x(1) \geq 1.$$

(a) Opstil de nødvendige betingelser for at en funktion $x(t)$ er løsning.
(b) Find den eneste mulige løsningskandidat.
(c) Begrund, at denne faktisk løser problemet.

Opgave 5 (Vægt 25%)

Man betragter et optimalt kontrolproblem

$$\begin{aligned} \text{Maksimér} \int_0^2 (1-u)(x+t^2)\,dt, \ &\text{under betingelserne} \\ \dot{x} &= u(x+t^2), \\ x(0) = 1,\ x(2) &\text{ er fri}, \\ u &\in [0,1]. \end{aligned}$$

(a) Vis, at et tilladt par $(x(t), u(t))$ må opfylde $x(t) \geq 1$ for $t \in [0,2]$.
(b) Opstil de nødvendige betingelser, der fås fra maksimumsprincippet, for at et tilladt par er optimalt.
(c) Vis, at $\dot{p}(t) < 0$.
(d) Find den eneste mulige løsningskandidat. (Vink: Begynd med at bestemme $p(t)$ i omegnen af $t = 2$.)
(e) Vis, at denne løsningskandidat virkelig løser problemet.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra andre af opgavens spørgsmål, selvom disse ikke er besvaret.