Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, august 1998

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

4 timers skriftlig prøve

onsdag den 5. august 1998

Opgavesættet er på to sider og består af 6 enkeltopgaver.
Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (Vægt 10%)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\dot{x} + \frac{2}{t^3}x = \frac{4}{t^3}\,, \qquad t > 0$$

som opfylder $x(1) = 0$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Der er givet et system af 1. ordens differentialligninger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 - 3x_2 - 5\sin t + 4\cos t \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \qquad\quad\; - 3\sin t \quad . \end{aligned}$$

i) Bestem den fuldstændige løsning.

ii) Find den partikulære løsning som opfylder $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 0$.

Opgave 3 (Vægt 20%)

Der er givet et autonomt system i planen ved

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy - x^3 - \frac{3}{4}x \\ \dot{y} &= 4x^2y^2 - y^4. \end{aligned}$$

i) Bestem ligevægtspunkterne i 1. kvadrant og redegør for deres stabilitetsforhold.

ii) Lav et fasediagram i 1. kvadrant. Der ønskes ikke en detaljeret redegørelse, men blot en pilmarkering af fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$.

iii) Begrund, at en bane $(x(t), y(t))$ defineret på et åbent interval I og som til et tidspunkt s i I opfylder $x(s) > 0$, $\dot{x}(s) > 0$, $y(s) > 0$, $\dot{y}(s) > 0$ vil opfylde $x(t) > 0$, $\dot{x}(t) > 0$, $y(t) > 0$, $\dot{y}(t) > 0$ for alle $t > s$ i I.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 15%)

Der er givet en differensligning

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} - 5x_t = 6(-1)^t - 8t^2 - 4t\,, \quad t \in \mathbb{N}\,.$$

i) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen.

ii) Fastlæg den løsning for hvilken $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Opgave 5 (Vægt 15%)

Der er givet et variationsproblem

maksimer $\int_0^1 (-4x^2 - \dot{x}^2 - 16)\,dt$

$x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Find den eneste mulige løsning og begrund, at den er optimal.

Opgave 6 (Vægt 20%)

Der er givet et optimalt kontrolproblem

$$\max\left\{2x(1) + \int_0^1 (-2x^2 - u)\,dt\right\}\,.$$

$x(0) = 1$, $\dot{x} = u$, $0 \leq u \leq 1$.

i) Opstil betingelserne som en optimal løsning må tilfredsstille.

ii) Vis, at $x(t) \geq 1$ for alle $t \in [0, 1]$.

iii) Vis, at p er strengt voksende med $p(0) < 1$ og $p(1) > 1$.

iv) Find den eneste mulige løsning og begrund, at den er optimal.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra tidligere spørgsmål selvom disse ikke er besvaret.