Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København **sommer 1998**

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik
4 timers skriftlig prøve
9. juni 1998

Opgavesættet er på to sider og består af 6 enkeltopgaver. Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (Vægt 10%)

Find den løsning $x(t)$ til differentialligningen

$$\dot{x} = x^2 - 4\,,$$

som opfylder $x(0) = 0$.

Opgave 2 (Vægt 15%)

For $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ defineres $f(x)$ ved

$$f(x) = \int_1^{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{8t^2 + 2t^4}{(1 + xt^2)^2}\, dt\,.$$

(a) Find et udtryk for $f'(x)$.

(b) Beregn $\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\, dx$. (Vink: Ombyt integrationsordenen).

Opgave 3 (Vægt 20%)

Der er givet følgende system af 1. ordens differentialligninger:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - 2t - 1\,, \\ \dot{y} &= -x \qquad\quad + 4e^t\,. \end{aligned}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning.

(b) Fastlæg den løsning som opfylder $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 20%)

Der er givet et autonomt system i planen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 25x - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} &= 7y - xy - y^2 \,. \end{aligned}$$

(a) Find systemets ligevægtspunkter og bestem stabilitetsforholdene for disse.

(b) Lad K betegne den lukkede kvartcirkel, der er bestemt ved

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 64\}$$

og lad $(x(t), y(t))$ være en løsning defineret på et åbent interval I. Vis, at hvis det for $t \in I$ gælder at $(x(t), y(t)) \in K$, så vil det for alle $s \in I$ med $s > t$ gælde, at $(x(s), y(s)) \in K$.

Opgave 5 (Vægt 15%)

Der er givet differensligningen;

$$4x_{t+2} + x_t = 5t^2 + 16t + 11\,, \quad t \in \mathbb{N}\,.$$

Find den løsning $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ som opfylder

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 2\,.$$

Opgave 6 (Vægt 20%)

Der er givet et optimalt kontrolproblem;

$$\max \int_0^1 (ex - u^2)\,dt\,,\ x' = 2u - x\,,\ 0 \leq u \leq 1\,, \quad x(0) = 0\,, \quad x(1) \text{ fri},$$

(e er en konstant, grundtallet for den naturlige logaritme).

(a) Opstil de ligninger som en optimal løsning med tilhørende adjungeret funktion $p(t)$ må opfylde.

(b) Løs ligningerne og begrund, at den fundne løsning er optimal.