Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik
4 timers skriftlig prøve
9. juni 1997

Opgavesættet er på to sider og består af 6 enkeltopgaver. Alle hjælpemidler er tilladte inklusive lommeregnere.

Opgave 1 (Vægt 10%)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$(e + t^2)\dot{x} + tx^3 = 0,$$

som opfylder $x(0) = 1$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

a) Bestem den løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + x_2 + 2t^2 + 2t \\ x_2' &= -10x_1 - x_2 + 11t^2 + 2t \end{aligned}$$

som opfylder $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.
b) Hvorledes forløber banen asymptotisk når $t \to +\infty$.

Opgave 3 (Vægt 20%)

Der er givet et differentialligningssystem

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 2x^2 - xy \\ y' &= 6y - xy - 2y^2 \,. \end{aligned}$$

a) Bestem systemets ligevægtspunkter og angiv arten af ligevægtspunktet i det indre af 1. kvadrant.
b) Afsæt de 4 punkter $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, og $(1, 3)$ i et koordinatsystem og marker med en pil ud fra hvert punkt retningen som banen gennem dette punkt har.
c) Begrund, at en bane $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, \infty[\}$ som starter i det indre af 1. kvadrant altid vil forblive i det indre af 1. kvadrant og udgøre en begrænset punktmængde.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (Vægt 15%)

a) Bestem den løsning $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ til differensligningen

$$(*) \qquad 4x_{t+2} - x_t = 3t^2 + 16t + 16\,,$$

som opfylder $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$.

b) Undersøg stabilitetsforholdene for ligningen $(*)$.

Opgave 5 (Vægt 15%)

Betragt variationsproblemet

$$\text{Maksimer} \qquad \int_0^1 (12xt - \dot{x}^2 - 2\dot{x})\,dt,\ x(0) = 0,\ x(1) \text{ fri.}$$

a) Bestem den eneste mulige løsning som opfylder Eulers ligning, initialbetingelsen og transversalitetsbetingelsen
b) Begrund, at den fundne løsning er optimal.

Opgave 6 (Vægt 20%)

Betragt kontrolproblemet

(1) Maks. $\int_0^4 (x - u^2)\,dt$,
(2) $\dot{x} = 2u$, $x(0) = 0$, $x(4)$ fri
(3) $-1 \le u(t) \le 1$.

a) Opstil de betingelser maksimumsprincippet giver.

b) Løs ligningerne fra spørgsmål a) og begrund, at den fundne løsning er optimal.