Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, 31. maj 1995

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

4 timers skriftlig prøve

Opgavesættet er på to sider og består af 5 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladt inklusive lommeregnere.

Opgave 1 (22 points)

Betragt det lineære program

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maksimer} & x_1 - 5x_2 + 7x_3 \\ \text{m.h.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \leqq 11 \\ & -x_1 + 7x_2 = 1 \\ & x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{array}
$$

(i) Find en optimal løsning til programmet (P) og gør rede for, at det er den eneste optimale løsning. Angiv den optimale værdi for (P).

(ii) Opskriv det duale program (P') til (P) og angiv en optimal løsning til (P'). Er denne også den eneste ?

Opgave 2 (24 points)

(i) Angiv den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0\ .$$

(ii) Beregn en løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = t^2 + 4t\ ,$$

og angiv derefter samtlige løsninger til denne ligning.

(iii) Angiv den løsning x til spørgsmål (ii), som opfylder $x(0) = x'(0) = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (18 points)

I $\mathbb{R}^3$ betragtes punkterne

$$\underline{x}_1 = (8, -3, 2)\ , \quad \underline{x}_2 = (2, 1, 4)\ , \quad \underline{x}_3 = (-1, 3, -4)\ , \quad \underline{x}_4 = (2, 1, 1)\ .$$

(i) Gør rede for, at $\underline{x}_4$ er en konveks kombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$.
Angiv en sådan konveks kombination.

(ii) Gør rede for, at $\underline{x}_3$ ikke er en konveks kombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$.

(iii) Forklar, at conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \neq$ conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$
og at conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) =$ conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4)$.

Opgave 4 (18 points)

Betragt det ikke-lineære programmeringsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{maksimer} & 3x + y^2 \\ \text{m.h.t.} & x^2 + y^2 \leqq 25 \ \text{ og } \ x \geqq 0 \end{array}$$

Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for problemet og find løsningen ved hjælp af disse.

Opgave 5 (18 points)

Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 + 4x_3\ . \end{aligned}$$

Opgavesættet slut