

HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/Matematik studiet, sommeren 1994

4 timers skriftlig prøve

MATEMATIK

4. semester

Alle hjælpemidler er tilladt.
Sættet består af fem opgaver.

Opgave 1

- a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'' - 6x' + 9x = 0 .$$

- b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t} .$$

Opgave 2

Lad $T : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ være givet ved

$$T(x) = 2 + \frac{3}{x} .$$

- a) Vis, at $|T(x) - T(y)| \leq 3|x - y|$.
b) Find T 's fixpunkt(er).
c) Lad $T_1 : [2, \infty[\rightarrow [2, \infty[$ være givet ved $T_1(x) = T(x)$. Vis, at T_1 er en kontraktion.
d) Vis, at

$$T^n(x) = T(T(\dots(T(x))\dots)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

for alle $x \in [1, \infty[$.

Opgave 3

Lad $C = \text{Konv} \{(0, 0), (0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + 1$.

- a) Find C 's hjørner.
- b) Vis, at f er konveks.
- c) Find normalkegler til C i punkter $(0, 0)$ og $(0, 1)$.
- d) Vis, at

$$\text{grad } f(0, 0) \in -N_C(0, 0) .$$

- e) Find

$$\min_{(x,y) \in C} f(x, y) .$$

Opgave 4

Lad f være givet ved

$$f(x, y) = 8x^2 - 8x - 4xy + y^2 + 4y .$$

- a) Vis, at

$$f(x, y) = 0$$

bestemmer y som funktion $\varphi(x)$ af x i omegn af punktet $(0, 0)$.

- b) Vis, at

$$f(x, y) = 0$$

ikke bestemmer y som C^1 -funktion af x i omegn af punktet $(1, 0)$.

- c) Find

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) .$$

Opgave 5

Løs følgende programmeringsopgave:

Find $\min ((x - 3)^2 + y^2)$ under bibetingelser

$$x \geq 0$$

$$y \geq x^2 .$$