Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladte og opgaven afleveres på gennemslagspapir eller udprintes. Eksamen afholdes med CBS-computere, som kan benyttes som lommeregner. Egen lommeregner må medbringes, dog uden kommunikationsmodul. USB eller lignende må ikke medbringes. Der er adgang til S-drevet (personlige CBS-drev), men der er ikke adgang til Learn.

Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt følgende lineære (inhomogene) differentialligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= kx + y + 1, \\ \dot{y} &= \phantom{kx + {}} ky. \end{aligned}$$

(a) For hvilke værdier af k er systemet asymptotisk stabilt?

(b) Bestem den generelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(c) Antag, at $k \neq 0$. Bestem den generelle løsning til differentialligningssystemet (*).

(d) Antag, at $k = 0$. Bestem den generelle løsning til differentialigningssystemet (*).

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x(16 - x^2 - y^2), \\ g(x, y) &= y(6 - x - y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, altså dels kurverne hvor $f(x, y) = 0$, dels kurverne hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (f.eks. $\uparrow$, $\downarrow$, $\uparrow\!\!\!\!\lfloor\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\rfloor\!\!\!\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af nul-kurverne. Du må gerne indskrænke undersøgelsen til første kvadrant: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(c) Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0))$ ligger i første kvadrant. Begrund, at $(x(t), y(t))$ ligger i første kvadrant for alle $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne i første kvadrant.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende variationsproblem, hvor b og c er reelle konstanter:

$$\text{(max)} \qquad \int_1^2 (ct^{b-2}x^2 - t^b\dot{x}^2)\,dt$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 1$ og $x(2)$ fri.

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen.

(b) Gør rede for, at hvis $c \leqslant 0$, så vil en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen, også løse maksimeringsopgaven.

(c) For $b = -1$ og $c = -3$ kan Eulerligningen reduceres til følgende: $t^2\ddot{x} - t\dot{x} - 3x = 0$. Vis, at funktionerne $x = t^3$ og $x = t^{-1}$ (for $t > 0$) løser denne ligning, og angiv den fuldstændige løsning.

(d) Løs maksimeringsopgaven (stadig for $b = -1$ og $c = -3$).

Opgave 4

Betragt for et reelt tal a den inhomogene differensligning,

$$x_{t+2} - (2a - \tfrac{1}{2})\,x_{t+1} - ax_t = 5(1-a)2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Vis, at følgen $x_t = 2^t$ er en partikulær løsning.

(b) For hvilke værdier af a er ligningen asymptotisk stabil?

(c) Bestem den generelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(d) Angiv den løsning x_t til den inhomogene ligning, som opfylder $x_0 = 3$, $x_1 = 1$.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad x(2) + \int_0^2 (-2tx - u^2)\,dt \quad \text{for} \;\; -1 \leqslant u \leqslant 1, \;\; \dot{x} = 2u, \quad x(0) = 1,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \quad x(2) + \int_0^2 \left(-2tx(t) - u(t)^2\right) dt \quad \text{for} \;\; -1 \leqslant u(t) \leqslant 1, \;\; \dot{x}(t) = 2u(t), \quad x(0) = 1.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem funktionen $p(t)$.

(c) Bestem derefter funktionerne $x(t)$ og $u(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.