Copenhagen Business School
Eksamen ved HA(mat.), maj 2013

Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladte og opgaven afleveres på gennemslagspapir eller udprintes. Eksamen afholdes med CBS-computere, som kan benyttes som lommeregner. Egen lommeregner må medbringes, dog uden kommunikationsmodul. USB eller lignende må ikke medbringes. Der er adgang til S-drevet (personlige CBS-drev), men der er ikke adgang til Learn.

Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt for et reelt tal a den inhomogene differentialligning,

$$\ddot{x} - (2a - \tfrac{1}{2})\,\dot{x} - ax = (2a - \tfrac{1}{2})\sin t - (a+1)\cos t.$$

(a) Vis, at funktionen $x = \cos t$ er en partikulær løsning.

(b) For hvilke værdier af a er ligningen asymptotisk stabil?

(c) Bestem den generelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(d) Angiv den løsning $x = x(t)$ til den inhomogene ligning, som opfylder $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x(1 - x^2 - y^2), \\ g(x, y) &= y(4 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, altså dels kurverne hvor $f(x, y) = 0$, dels kurverne hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (f.eks. $\uparrow$, $\downarrow$, $\uparrow\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af nul-kurverne. Du må gerne indskrænke undersøgelsen til første kvadrant: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(c) Lad D være området i xy-planen bestemt ved $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0)) \in D$. Begrund, at $(x(t), y(t)) \in D$ for $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne i første kvadrant.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende variationsproblem, hvor a er en reel konstant:

$$\text{(min)} \qquad \int_1^2 (8tx + atx^2 + t^2 x\dot{x} + t\dot{x}^2)\,dt,$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 0$ og $x(2)$ fri.

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Gør rede for, at hvis $a \geqslant 1$, så vil en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen, også løse minimeringsopgaven.

(c) For $a = 1$ kan Eulerligningen reduceres til $\frac{d}{dt}\big(t\dot{x}\big) = 4t$. Bestem den fuldstændige løsning til denne ligning.

(d) Opstil transversalitetsbetingelsen (stadig for $a = 1$), og løs minimeringsopgaven.

Opgave 4

Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - \tfrac{1}{2}y_t + \tfrac{1}{2}, \\ y_{t+1} &= \tfrac{7}{2}x_t - \tfrac{3}{2}y_t - \tfrac{9}{2}, \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Lad (x_t, y_t) være løsningen bestemt ved $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Bestem (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

(b) Afgør, om differensligningssystemet er asymptotisk stabilt.

(c) Begrund, at for et vilkårligt par (x_t, y_t) af følger, der løser systemet, eksisterer grænseværdierne $\lim_{t\to\infty} x_t$ og $\lim_{t\to\infty} y_t$.

(d) Bestem de to grænseværdier i (c).

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$\text{(max)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x\sin t - \tfrac{1}{2}u^2)\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u, \quad x(0) = \tfrac{-\pi}{3},\ x(\tfrac{\pi}{2}) \text{ fri},$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x(t)\sin t - \tfrac{1}{2}u(t)^2)\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = \tfrac{-\pi}{3},\ x(\tfrac{\pi}{2}) \text{ fri}.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem funktionen $p(t)$, og begrund, at $p(t)$ er strengt aftagende i intervallet $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, og at det eneste tal t^* i intervallet, for hvilket $p(t^*) = 1$, er $t^* = \frac{\pi}{3}$.

(c) Bestem derefter funktionerne $x(t)$, $u(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.