**Copenhagen Business School**
**Eksamen ved HA(mat.), august 2012**

# Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler er tilladt. Lommeregnere og computere er tilladt, dog skal trådløse modems eller andre kommunikationsmidler være deaktiverede under eksamen. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

## Opgave 1

(a) Bestem den generelle løsning til differentialligningen $\ddot{x} - \frac{1}{6}\dot{x} - \frac{1}{6}x = e^t$.

(b) Afgør om differentialligningen i (a) er asymptotisk stabil.

(c) Bestem den generelle løsning til differensligningen $x_{t+2} - \frac{1}{6}x_{t+1} - \frac{1}{6}x_t = e^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$.

(d) Afgør om differensligningen i (c) er asymptotisk stabil.

## Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= y - x^2, \\ g(x, y) &= (x + 1)(4 - y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og kurven (de 2 linier) hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ( $\rightarrow$, $\uparrow\rightarrow$, $\leftarrow\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to nulkurver.

(c) Lad $D$ være området i $xy$-planen bestemt ved $x \geqslant -1$, $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4$. Lad $(x_0, y_0)$ være et punkt i $D$, og lad $(x(t), y(t))$ være løsningen, som opfylder, at $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Beskriv, for nogle udvalgte punkter $(x_0, y_0)$ i $D$, løsningens bana for $t \geqslant 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.


Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Betragt følgende (inhomogene) differentialligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -\tfrac{1}{2}x + ky + \tfrac{1}{2}e^{-kt}, \\ \dot{y} &= \quad kx - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}e^{-kt}. \end{aligned}$$

(a) For hvilke værdier af $k$ er systemet asymptotisk stabilt?

(b) Vis, at med funktionerne $x = e^{-kt}$, $y = -e^{-kt}$ er parret $(x, y)$ en løsning.

(c) Antag, at $k = 1.$ Bestem den generelle løsning til det tilhørende homogene system.

(d) Antag stadig, at $k = 1.$ Bestem den generelle løsning til differentialigningssystemet (*).

## Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem, hvor $a$ og $b$ er positive konstanter:

$$(\text{min}) \int_0^1 e^{a\dot{x}+bx}\,dt, \quad \text{for } x(0) = 0, \text{ og } x(1) = 0.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Gør rede for, at en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og de givne randbetingelser, vil løse minimeringsopgaven.

(c) Antag, at $a = b = 1$, hvor Eulerligningen bliver $\ddot{x} + \dot{x} = 1.$ Løs minimeringsopgaven.

## Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol ($r$ og $k$ er givne positive konstanter):

$$(\text{max}) \quad \int_0^2 \left(ue^{(r+k)t} - kxe^{kt}\right) dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \;\; \dot{x} = ue^{rt}, \quad x(0) = 1, \;\; x(2) \text{ fri.}$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^2 \left(u(t)e^{(r+k)t} - kx(t)e^{kt}\right) dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \;\; \dot{x}(t) = u(t)e^{rt}, \;\; x(0) = 1, \;\; x(2) \text{ fri.}$$

Antag, at $(x, u)$ er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ ($p$ er den adjungerede funktion).

(b) Bestem funktionen $p(t)$. Begrund, at der findes et tal $t^* \in [0,2]$ således, at $u(t) = 0$ for $0 \leqslant t < t^*$ og $u(t) = 1$ for $t^* < t \leqslant 2$ (Det er ikke udelukket, at $t^* = 0$ eller $t^* = 2$).

(c) Antag, at $k = \ln 2$, og bestem værdien $t^*$ og funktionerne $x$ og $u$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.