Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt differentialligningssystemet,

$$\dot{x} = -x^2, \qquad \dot{y} = 2xy,$$

for par af funktioner $(x, y) = (x(t), y(t))$ defineret i et interval omkring $t = 0$.

(a) Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet. [Vink: Bestem den generelle løsning $x = x(t)$ til den første ligning, og indsæt denne løsning i den anden ligning.]

(b) Angiv for hvert par af løsninger (x, y) det maksimale definitionsinterval, som indeholder $t = 0$.

(c) Bestem det par af løsninger, som opfylder $x(0) = \frac{1}{3}$, $y(0) = 1$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= y - x^2, \\ g(x, y) &= x(x - y + 2). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og de 2 linier hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af kurven og de 2 linier.

(c) Lad D være området i xy-planen bestemt ved $x \geqslant 0$, $y \geqslant x^2$, $x - y + 2 \geqslant 0$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0)) \in D$. Vis, at $(x(t), y(t)) \in D$ for $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende differensligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{2}x_t + ky_t - \tfrac{1}{2}(-1)^t k^t, \\ y_{t+1} &= kx_t + \tfrac{1}{2}y_t + \tfrac{1}{2}(-1)^t k^t. \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) For hvilke værdier af k er differensligningssystemet asymptotisk stabilt?

(b) Vis, at med følgerne $x_t = (-1)^t k^t$, $y_t = (-1)^{t+1} k^t$ for $t = 0, 1, 2, \ldots$ er parret (x_t, y_t) en løsning.

(c) Antag, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til det tilhørende homogene system.

(d) Antag stadig, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til differensligningssystemet.

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem (hvor $r \in \mathbb{R}$ er konstant):

$$(\min) \int_0^1 (2x^2 + (4t - 5e^{rt})x\dot{x} + 12e^{rt}\,\dot{x}^2)\,dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(1) = e^{\frac{1}{6}}.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Antag i det følgende, at $r = \frac{2}{3}$. Eulerligningen er da ligningen $\ddot{x} + \frac{2}{3}\dot{x} - \frac{5}{36}x = 0$. Bestem den løsning til Eulerligningen, som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, stadig for $r = \frac{2}{3}$, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet. [Du kan fx have brug for at vise for $0 \leqslant t \leqslant 1$, at $|4t - 5e^{\frac{2}{3}t}| \leqslant 5e^{\frac{2}{3}}$; i øvrigt må du bruge vurderingen $e^{\frac{4}{3}} \leqslant 3,8$.]

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^3 (-u - 1)x^2\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \ \dot{x} = -ux^2, \quad x(0) = \tfrac{1}{3}, \ x(3) \text{ fri}.$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^3 (-u(t) - 1)x(t)^2\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ \dot{x}(t) = -u(t)x(t)^2, \ x(0) = \tfrac{1}{3}, \ x(3) \text{ fri}.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

Man kan vise for alle $t \in [0, 3]$, at $x(t) > 0$ og at $p(t) > -2$. Det kræves ikke bevist, men det må bruges i det følgende.

(b) Vis, at $p(t)$ er strengt voksende på intervallet $[0, 3]$. Vis, at der højst findes én værdi $t^* \in [0, 3]$, så $p(t^*) = -1$. Bestem dernæst $x(t)$, $u(t)$ og $p(t)$ for $t \in [t^*, 3]$.

(c) Bestem derefter værdien t^* og funktionerne $x(t)$, $u(t)$ og $p(t)$ for alle $t \in [0, 3]$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.