CBS, Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), maj 2011

Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Der er givet en differentialligning

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \;=\; 4t^2 + 4t.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

(b) Afgør om differentialligningen er globalt assymptotisk stabil.

(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(d) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder randbetingelserne $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = -2$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2 - y, \\ g(x,y) &= x(2x + y - 4). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Angiv koordinaterne for systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-mængder, dvs mængden hvor $f(x,y) = 0$, og mængden hvor $g(x,y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de 8 områder, som planen deles i af disse mængder.

(c) Lad $\big(x(t), y(t)\big)$ betegne den løsningskurve til differentialligningssystemet, som opfylder $\big(x(0), y(0)\big) = (-1, 4)$. Vis at mængden af punkter i planen, som er givet ved $\{\big(x(t), y(t)\big) \,\big|\, t \geqslant 0\}$ er en begrænset delmængde af planen.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende lineære system af første ordens differensligninger.

$$x_{t+1} = \frac{3}{2}x_t - y_t$$
$$y_{t+1} = 2x_t - \frac{3}{2}y_t - 3$$

(a) Bestem den konstante løsning $x_t = a$, $y_t = b$ til systemet.

(b) Bestem den fuldstændige løsning til systemet.

(c) Vis, at hvis følgerne x_t og y_t løser systemet, så er de begge konvergente. Bestem grænseværdierne.

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$(\max) \int_0^1 (-9x^2 + 4x\dot{x} - \dot{x}^2 + 18tx)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 0, \text{ og } x(1) = e^3 - e^{-3} + 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\sqrt{2}} (2tx + (t-2)u)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 2,\ \dot{x} = (2-t)u,\ x(0) = 0,\ x(\sqrt{2}) \text{ fri.}$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$, hvor p er den adjungerede funktion.

(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne.

(c) Begrund, at den fundne tilstandsfunktion $x(t)$ løser maksimeringsproblemet.

Opgavesættet er slut.