Copenhagen Business School
Eksamen ved HA(mat.), august 2010

Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Der er givet en differentialligning

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 25x \;=\; 16e^{3t} + 50t^2 + t - 2.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(b) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder randbetingelserne $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 1$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= -x^2 + 2x + 2y - 3, \\ g(x, y) &= -y^2 + 2x + 2y - 3. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurverne hvor $f(x, y) = 0$, og $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de 2 kurver.

(c) Lad $(x(t), y(t))$ betegne den løsningskurve til differentialligningssystemet som opfylder $(x(0), y(0)) = (2, 2)$. Angiv, med begrundelse, en begrænset delmængde af planen som vil indeholde alle punkterne $(x(t), y(t))$ for $t \geqslant 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende (inhomogene) differensligning:

$$x_{t+3} - \tfrac{5}{2}x_{t+2} + 2x_{t+1} - \tfrac{1}{2}x_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Vis, at den konstante følge $x_t = 1$ løser den tilsvarende homogene ligning. [Vink: Tallet $z = 1$ er rod i polynomiet $z^3 - \frac{5}{2}z^2 + 2z - \frac{1}{2}$.]

(b) Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(d) Afgør om differensligningen er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_1^2 (tx^2 + 2e^t\dot{x}^2 + t^2x\dot{x})\,dt, \quad \text{for } x(1) = 1, \text{ og } x(2) = 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\ln 3} (-x + u)\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u^2 - 2u + x,\ x(0) = 0,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\ln 3} \big(-x(t) + u(t)\big)\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t)^2 - 2u(t) + x(t),\ x(0) = 0.$$

Slutværdien $x(\ln 3)$ er altså fri. Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet, og at p er den adjungerede funktion.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$.

(b) Bestem funktionen $p(t)$ og vis specielt, at $p(t) < 0$ for $t < \ln 3$.

(c) Bestem derefter funktionerne $u(t)$ og $x(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.