Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

(a) Betragt i området af $TX-$planen givet ved $\{(t,x) \mid t > -1 \text{ og } x > 0\}$ følgende differentialligning:
$$\dot{x} = -4x^2(1+t)^3.$$
Bestem den løsning til ligningen som opfylder $x(0) = 1$.

(b) Betragt i området af $TX-$planen givet ved $\{(t,x) \mid t > -1\}$ følgende differentialligning:
$$\dot{x} + \frac{4}{1+t}x = \frac{4}{1+t}.$$
Bestem den løsning til ligningen som opfylder $x(0) = 1$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ g(x,y) &= (x+y+1)(x+y-1). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurven, dvs kurven hvor $f(x,y) = 0$, og de 2 linier hvor $g(x,y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af kurven og de 2 linier.

(c) Vis at den løsningskurve $\big(x(t), y(t)\big)$ til differentialligningssystemet, som opfylder $\big(x(0), y(0)\big) = \big(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\big)$, forløber indenfor enhedcirklen for $t > 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$
og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= -x_t - y_t + 1, \\ y_{t+1} &= \tfrac{2}{3}x_t + \tfrac{5}{6}y_t. \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem de to konstante følger x_t og y_t, der løser systemet (*).

(b) Afgør om systemet (*) er globalt asymptotisk stabilt.

(c) Antag, at følgerne x_t og y_t løser systemet (*). Begrund, at følgerne er konvergente, og bestem deres grænseværdier.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til systemet (*).

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$\text{(min)} \int_0^1 (2x^2 + \dot{x}^2 + 2tx\dot{x} + 4t\dot{x} + 2x)\,dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(1) = 2.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad -\tfrac{3}{2}x(\pi)^2 + \int_0^\pi x \sin t\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u \sin t,\ x(0) = 0,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } -\tfrac{3}{2}x(\pi)^2 + \int_0^\pi x(t) \sin t\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t) \sin t,\ x(0) = 0.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Vis, at funktionen $x(t)$ er voksende og at $p(t)$ er aftagende på intervallet $[0, \pi]$. Vis, at der findes en værdi t^* med $0 < t^* < \pi$ så $p(t^*) = 0$.

(c) Bestem derefter funktionerne $u(t)$ og $x(t)$ og værdien t^*.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.