Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt følgende differentialligning:

$$\ddot{x} + x = e^t - 2\sin t.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)(y + 1), \\ g(x, y) &= y(y - 1). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og kurven hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (↳, ↲, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver. [Bemærk: Hver af de to nul-kurver består af to linier.]

(c) Skitser banerne for de tre løsningskurver, dvs kurver bestemt ved løsninger $(x(t), y(t))$, der begynder, henholdsvis, i $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$, i $(1, 1)$, og i $(1+\varepsilon, 1)$, hvor $\varepsilon = 1/10$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{3}x_t + \tfrac{1}{3}y_t + 2, \\ y_{t+1} &= \tfrac{1}{3}x_t - \tfrac{1}{6}y_t + 5, \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem de to konstante følger x_t og y_t, der løser systemet (*).

(b) Afgør om systemet (*) er (globalt asymptotisk) stabilt.

(c) Antag, at følgerne x_t og y_t løser systemet (*). Begrund, at følgerne er konvergente, og bestem deres grænseværdier.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til systemet (*).

Opgave 4

(a) Vis, at funktionerne $x(t) = t^2$ og $x(t) = t^{-1}$ er løsninger til differentialligningen,

$$\ddot{x} = 2t^{-2}x, \qquad t > 0,$$

og angiv den generelle løsning.

(b) Bestem den funktion $x(t)$, som løser differentialligningen i (a) og opfylder, at $x(1) = 17$ og $\dot{x}(2) = 0$.

(c) Gør rede for, at funktionen $x(t)$ bestemt i (b) for $1 \leqslant t \leqslant 2$ løser følgende variationsproblem:

$$(\text{min}) \int_1^2 \left(\dot{x}^2 + 2t^{-1}x^2\right) dt, \quad \text{for } x(1) = 17, \text{ og } x(2) \text{ fri.}$$

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\text{max}) \quad \int_0^{\frac{1}{3}} (-4x^2 - u^2 - 6txu)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \ \dot{x} = t + u, \ x(0) = 0, x(\tfrac{1}{3}) \text{ fri,}$$

eller, udførligt: Maksimer

$$\int_0^{\frac{1}{3}} (-4x(t)^2 - u(t)^2 - 6tx(t)u(t))dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ \dot{x}(t) = t + u(t), \ x(0) = 0, x(\tfrac{1}{3}) \text{ fri.}$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Antag, at funktionerne x, u, p opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne. Gør rede for, at der for $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ gælder: $\dot{x}(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$, $\dot{p}(t) \geqslant 0$, $p(t) \leqslant 0$. Bestem dernæst funktionerne u, x og p.

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.