Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), maj 2009

Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner uden kommunikationsmodul må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt følgende differentialligning:

$$\ddot{x} - x = e^t - 2\sin t.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= xy, \\ g(x,y) &= (1+x)(1-y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x,y) = 0$, og kurven hvor $g(x,y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver. [Bemærk: Hver af de to nul-kurver består af to kurver.]

(c) Skitser banen for en kurve i planen, der begynder i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Lad $M \subseteq \mathbb{R}^2$ betegne delmængden bestemt ved ulighederne $x > 0$ og $0 < y < 1$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsning, defineret for alle $t \geqslant t_0$ og med $(x(t_0), y(t_0)) \in M$. Begrund, at $(x(t), y(t)) \in M$ for alle $t \geqslant t_0$. Hvad sker der med $x(t)$ og $y(t)$ for $t \to \infty$?

(e) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+4} - \tfrac{1}{2}x_{t+2} + \tfrac{1}{16}x_t = 9 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning. [Vink: For alle komplekse tal z gælder: $z^4 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16} = (z - \frac{1}{2})^2(z + \frac{1}{2})^2$.]

(b) Bestem en partikulær løsning til (*).

(c) Afgør om differensligningen er globalt asymptotisk stabil.

(d) Vis, at hvis følgen x_t løser (*), så er følgen x_t konvergent. Bestem grænseværdien.

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$\text{(min)} \int_0^{1/3} (3tx\dot{x} + 2x^2 + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2)\,dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(\tfrac{1}{3}) \text{ fri.}$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen og opfylder betingelserne i endepunkterne.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad -x(\ln 4) + \int_0^{\ln 4} (8e^{-t}x + u)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \ \dot{x} = -x - u, \ x(0) = 1,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } -x(\ln 4) + \int_0^{\ln 4} (8e^{-t}x(t) + u(t))\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ \dot{x}(t) = -x(t) - u(t), \ x(0) = 1.$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne. [Vink: for at bestemme $u(t)$ og $x(t)$ må du vise, at ligningen $p(t_0) = 1$ gælder, hvis og kun hvis $t_0 = \ln 2$.]

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.