Differentialligninger og optimal kontrolteori

Handelshøjskolen i København

Eksamen den 8. maj 2008, kl. 9.00 – 13.00

Eksamenssættet er på 2 sider og består af 16 spørgsmål fordelt på 8 opgaver. De 16 spørgsmål vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt, inklusiv lommeregnere, men ikke mobiltelefoner og bærbare computere.

Opgave 1. Find en løsning til differentialligningen

$$\dot{x} = (x+1)\cdot(t^2+\cos t)\ ,\ x(0)=4\ .$$

Opgave 2. Find en løsning til differentialligningen

$$\dot{x} = x - 5x^5\ ,\ x(0)=\frac{1}{2}\ .$$

Opgave 3. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 10x = e^{2t}\ .$$

Opgave 4. Betragt differentialligningen

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + x = t - 3\ .$$

(a) Opskriv den karakteristiske ligning, og vis, at den har én reel rod med multiplicitet 4.
(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 5. Betragt systemet af differentialligninger

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2+y^2-2\ ,\\ \dot{y} &= x^3-y\ .\end{aligned}$$

(a) Tegn kurverne $x^2+y^2-2=0$ og $x^3-y=0$, og find systemets ligevægtspunkter.
(b) Find for hvert ligevægtspunkt dettes art (dvs. afgør, om det er stabilt, en kilde, et sadelpunkt eller et center).

Opgave 6.
(a) Find løsningen $(x_t)_{t\geq 0}$ til differensligningen

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} + x_t \ , \ x_0 = 0 \ , \ x_1 = 1 \ .$$

(b) Vis, at følgen $\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)_{t\geq 1}$ er konvergent, og find grænseværdien.

Opgave 7. Betragt variationsproblemet

$$\min \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2 + t^2\dot{x})dt \ , \ x(0) = 2 \ , \ x(1) = e + e^{-1} + 1 \ .$$

(a) Opskriv Euler-ligningen.
(b) Find den løsning til Euler-ligningen, som opfylder randkravene.
(c) Afgør med henvisning til en sætning i bogen, om den fundne funktion løser minimeringsproblemet.

Opgave 8. Antag, at (x, u) er en løsning til skrotværdiproblemet (norsk: *skrapverdi-problemet*)

$$\text{maks} \ \left\{\int_0^\pi (x \cdot \sin t)dt - x(\pi)\right\}$$

med bibetingelserne

$$x(0) = 0 \ , \ x(\pi) \text{ fri} \ , \ \dot{x} = u \cdot \sin t \ , \ u \in [0, 1] \ .$$

(a) Opskriv Hamilton-funktionen, skrotværdifunktionen og transversalitetsbetingelsen, og bestem den adjungerede funktion p.
(b) Find kontrolfunktionen u.
(c) Find tilstandsvariablen x.
(d) Afgør med henvisning til en sætning i bogen, om det ovenfor fundne par (x, u) faktisk løser skrotværdiproblemet.