Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Maj 2007

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), …, som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	4	5	2	4	5
Opgavens vægt	20%	25%	10%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges også vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), … .

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

Recomp. 4/3-2009/AT

OPGAVE 1 (20 %).

Lad a være et reelt tal, og betragt den *homogene* differentialligning

$$(\mathrm{HL}_a) \qquad \ddot{x} - (a+1)\dot{x} + ax = 0\,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning, når $a \neq 1$.

(b) Bestem den fuldstændige løsning, når $a = 1$.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den *inhomogene* ligning

$$(\mathrm{IL}_1) \qquad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t\,.$$

(d) Afgør om (IL_1) er (lokalt asymsymptotisk) stabil.

OPGAVE 2 (25 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} y - x^2 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (y-1)(y-4) \end{aligned}$$

samt *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem og angiv samtlige ligevægtspunkter for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de regioner, som F og G inddeler planen i.

(c) Benyt faseplansanalysen til at begrunde, at punktet $(-2,4)$ *ikke* er lokalt asymptotisk stabilt.

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$.

(e) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

OPGAVE 3 (10 %).

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

$$(\dagger) \qquad x_{t+2} = -2x_{t+1} - 2x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots\,.$$

(b) Bestem løsningen til $(\dagger)$ med $x_0 = 1$ og $x_2 = 2$. Udregn denne løsnings x_1 og x_4.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

(Min) $$\int_0^{\ln 2} \big(x(t)^2 + 2tx(t)\dot{x}(t) + e^t\dot{x}(t)^2\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Betragt afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + 2txy + e^t y^2$, og bevis, at den er konveks for alle $t \in [0, \ln 2]$.

Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 1$.

(c) Bestem en funktion x, der løser problemet (Min), når slutværdien $x(\ln 2)$ er *fri*, og angiv $x(\ln 2)$.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 1$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

(Max) $$\int_0^{2} \big(x(t) - u(t) - u(t)^2\big)\,dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ er fri, og $u \in [0, 1]$.

Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem disse betingelser for x, u og p.

(b) Bestem funktionen p.

(c) Bestem funktionen u.

(d) Bestem funktionen x.

(e) Begrund, at problemet (Max) er løst.