Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juli 2006

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), …, som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	3	4	4	5	4
Opgavens vægt	15%	20%	20%	25%	20%

Bedømmelse. Der lægges også vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), … .

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Bestem $a, b \in \mathbb{R}$, så der for alle $t \in \mathbb{R}$ med $|t| \neq 2$ gælder:

$$(\dagger) \qquad \frac{4}{t^2-4} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2}.$$

(b) Bestem den fuldstændige løsning til *differentialligningen*

$$(*) \qquad \dot{x} = \frac{4x}{t^2-4}.$$

(c) Bestem først løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 1$ og denne løsnings maksimale definitionsinterval. Bestem dernæst løsningen x til $(*)$ med $x(-3) = 0$ og denne løsnings maksimale definitionsinterval.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} y \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y - 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem samtlige lokale sadelpunkter.

(c) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i.

(d) Skitsér en mulig bane fra $(0,1)$ mod $(1,0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne.

Skitsér endvidere en mulig bane fra $(2,-1)$ mod $(1,0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne og informationerne fra (b).

Skitsér endelig en mulig bane fra $(0,1)$ mod $(-1,0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne, og som går gennem *fire* regioner.

(Om sådanne baner faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 3 (20%).
(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

(HL) $$x_{t+3} - x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(b) Bestem den fuldstændige løsning til den *inhomogene differensligning:*

(IL) $$x_{t+3} - x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 8 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(c) Bestem løsningen til (IL) med $x_0 = 2$, $x_1 = 2$ og $x_2 = 10$. Udregn denne løsnings x_5 .
(d) Afgør om (IL) er lokalt asymptotisk stabil.

OPGAVE 4 (25 %). Betragt *variationsproblemet*

(Min) $$\int_0^{\pi} \Big(\big(x(t) + 2\sin t\big)^2 + \big(\dot{x}(t) + 1\big)^2 \Big) dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.
(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.
(b) Bevis, at afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (x + 2\sin t)^2 + (y + 1)^2$ er konveks.
(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\pi) = 0$.
(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er, at $x(\pi)$ er *fri.* Begrund, at der her gælder $x(\pi) < 0$.
(e) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\pi) \geq 0$.

OPGAVE 5 (20 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

(Max) $$\int_0^2 \big(x(t) - e^{u(t)}\big) dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(2)$ er fri, og $u \in [\,0, 1\,]$.
Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.
(a) Bestem de betingelser, som x, u og p ifølge maksimumsprincippet opfylder.
(b) Bestem funktionen p, og skitsér dens graf.
(c) Bestem funktionen u.
(d) Bestem funktionen x, og skitsér dens graf.