Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juni 2006

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5%:

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	4	4	3	4	5
Opgavens vægt	20%	20%	15%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges også vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (20 %).
Betragt *differentialligningen*

(IL) $$\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 5e^{2t}\,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning (FHL) til den tilsvarende *homogene* ligning (HL).

(b) Bestem den fuldstændige løsning (FIL) til (IL).

(c) Bestem løsningen x til (IL) med $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ og $\ddot{x}(0) = -1$

(d) Afgør om (IL) er lokalt asymptotisk stabil.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

(∗) $$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x^2 - y^2 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for (∗).

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i. Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne, og som går fra $(0,2)$ mod $(1,1)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$.

(d) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

OPGAVE 3 (15 %). Lad a være et positivt reelt tal.

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

(HL_a) $$x_{t+2} + a^2 x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots.$$

(b) Bestem mængden af $a > 0$ for hvilke (HL_a) er lokalt asymptotisk stabil.

(c) Bestem for $a = \frac{1}{2}$ løsningen til (HL_a) med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$. Udregn denne løsnings x_5.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^{\ln 2} \Big(\big(x(t) + \dot{x}(t)\big)^2 + 2x(t) \Big) dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = -1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Begrund, at afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (x + y)^2 + 2x$ er konveks. Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2)$ *fri*, og udregn denne løsnings værdi for $t = \ln 2$.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 2$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^1 \big(x(t) - e^{u(t)}\big) dt$$

når $\dot{x} = u - x$, $x(0) = 1$, $x(1)$ er fri, og u tilhører et kontrolrestriktionsinterval I, der angives senere.

Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem disse betingelser for x, u og p.

(b) Bestem funktionen p. (Dette kan gøres uden at kende I.) Begrund, at $p(t) > 0$ for $t < 1$.

(c) Antag nu, at $I = [\,0\,,1\,]$. Bestem funktionerne u og x i dette tilfælde, og begrund, at (x, u) er en løsning til (Max).

(d) Antag dernæst, at $I = \mathbb{R}$. Bestem funktionen u i dette tilfælde, og begrund, at der findes netop en løsning (x, u) til (Max), men x ønskes ikke angivet eksplicit.

(e) Antag fortsat, at $I = \mathbb{R}$. Lad $G : [\,0\,,1\,] \to \mathbb{R}$ være stamfunktionen til funktionen $u(t)e^t$ med $G(0) = 1$ (men G ønskes ikke bestemt). Bevis, at $x(t) = G(t)e^{-t}$ (og x ønskes stadig ikke angivet eksplicit).