Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juli 2005

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	4	4	3	4	5
Opgavens vægt	20%	20%	15%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges også vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

`Opgavesættet starter på næste side`

Opgave 1 (20 %).

(a) Bestem samtlige løsninger til den *separable differentialligning:*

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = x(t)^2 2^t \,,$$

idet definitionsintervallerne dog ikke ønskes angivet.

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = \ln 2$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -\ln 2$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

(d) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -\ln \sqrt{2}$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

Opgave 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} x^2 - y \\ \dot{y} &= g(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} x^2 - (y-2)^2 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og begrund, at punktet $(1,1)$ er ustabilt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(-3,0)$ mod $(-1,1)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem samtlige lokale sadelpunkter.

Opgave 3 (15 %). Betragt *differensligningerne*

$$\begin{aligned} &\text{(IL)} \quad x_{t+2} - x_t = t \quad , \quad t = 0,1,\dots \\ &\text{(HL)} \quad x_{t+2} - x_t = 0 \quad , \quad t = 0,1,\dots . \end{aligned}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til (HL). Afgør, om løsningerne er stabile.

(b) Bestem den fuldstændige løsning til (IL).

(c) Bestem x_5 for den løsning x til (IL) med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$.

`Opgavesættet fortsætter på næste side`

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^{\ln 2} \big(x(t)^2 + x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2 + 2x(t) + 2\dot{x}(t)\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 3$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 3$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^{\ln 2} \big(2tx(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)\,dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(\ln 2) = 0$ og $u \leq 1$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Begrund, at den tilhørende (sædvanlige) Hamiltonfunktion er konkav.

(b) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for x, u og p.

(c) Bestem $x(t)$, når $u(t) < 1$.

(d) Bestem $u(t)$ og $p(t)$, når $u(t) < 1$.

(e) Bestem en løsning til (Max).