Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juni 2005

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	4	4	3	4	5
Opgavens vægt	20%	20%	15%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges også vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (20 %).

(a) Løs *trediegradsligningen* (KL) $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$.

(b) Løs *differentialligningen* (HL) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 0$.

(c) Løs *differentialligningen* (IL) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 2e^t$.

(d) Bestem løsningen x til (IL) med $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 7$ og $\ddot{x}(0) = 16$.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og begrund, at punktet $(1,2)$ er ustabilt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(0,3)$ mod $(-1,2)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

OPGAVE 3 (15 %). Betragt *differensligningen*

$$(\dagger) \qquad x_{t+2} = -x_{t+1} - \tfrac{1}{4}x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til $(\dagger)$.

(b) Bestem løsningen til $(\dagger)$ med $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$, og udregn denne løsnings x_5.

(c) Afgør, om ligningen $(\dagger)$ er stabil.

`Opgavesættet fortsætter på næste side`

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^1 \big((\ln 2)^2 x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = 2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 2$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(tx(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)\,dt$$

når $\dot{x} = (u+1)^2$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [\,1, 2\,]$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for x, u og p.

(b) Bevis, at funktionerne x og p er strengt voksende, og at $p(t) < 0$ for $t < 2$.

(c) Bestem funktionerne u og x.

(d) Bestem funktionen p.

(e) Begrund, at der er fundet en løsning til (Max), og at der ikke findes andre.