Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juli 2004

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	3	5	3	4	5
Opgavens vægt	15%	25%	15%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra *ugesedlerne* (angiv ugeseddelnummer og eventuelt kuglenummer) eller *bogen* (dvs. Sydsæter bind 2; angiv enten sidenummer eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Løs den *separable differentialligning:*

$$(*) \qquad \dot{x} = \big(2tx(t)\big)^{-1}.$$

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 1$, bestem dens maksimale definitionsinterval, udregn $x(e)$, og tegn grafen.

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(-e) = -1$, bestem dens maksimale definitionsinterval, udregn $\dot{x}(-e)$, og tegn grafen.

OPGAVE 2 (25 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} xy \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x^2 + y^2 - 16 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og bestem mindst et ustabilt punkt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(3,1)$ til $(5,2)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$.

(e) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 3 (15 %). Betragt *differensligningen*

(†) $$x_{t+2} = x_{t+1} + 2x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til (†).

(b) Bestem løsningen til (†) med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, og udregn denne løsnings x_5 .

(c) Afgør, om ligningen (†) er stabil.

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

(Min) $$\int_0^1 \big(2x(t)^2 + 2tx(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Bevis, at for ethvert $t \in [\,0, 1\,]$ er funktionen $(x, y) \mapsto 2x^2 + 2txy + y^2$ konveks. Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = 1$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 1$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

(Max) $$\int_0^3 \big(-x(t) - \tfrac{1}{2}u(t)^2 + 2u(t)\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(3)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for funktionerne x, u og p.

(b) Bestem funktionen p og skitsér dens graf.

(c) Bestem funktionen u og skitsér dens graf.

(d) Bestem funktionen x og skitsér dens graf.

(e) Begrund, at der er fundet en løsning til (Max), og at der ikke findes andre.