**Handelshøjskolen i København**
**Eksamen ved HA(mat.), juli-august 2003**

# Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

## Opgave 1

Bestem den fuldstændige løsning til hver af følgende to differentialligninger:

(a) $(2 + \sin t)\dot{x} = x^2 \cos t.$

(b) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 1.$

## Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ g(x, y) &= 2x + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x, y) = 0$, og kurven, hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.

(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(0, 0)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.


Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Betragt følgende differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+2} - x_t = 2 + 3^t, \quad \text{for } t = 0, 1, 2, \dots .$$

(a) Bestem den generelle løsning til differensligningen.

(b) Bestem den løsning $x_t$, som opfylder, at $x_0 = 0$, $x_1 = 0$.

## Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^1 e^{\dot{x}-x}\,dt, \quad \text{for } x(0) = 0 \text{ og } x(1) = 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen og bibetingelserne.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

## Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^2 \big((2-t)e^t u - x\big)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u^2,\ x(0) = 0,\ \text{og } x(2) \text{ fri},$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^2 \big((2-t)e^t u(t) - x(t)\big)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t)^2,\ x(0) = 0,\ \text{og } x(2) \text{ fri}.$$

(a) Antag, at $(x, u)$ er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de ligninger, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ ($p$ er den adjungerede funktion).

(b) Bestem dernæst de funktioner $x$, $p$ og $u$, som opfylder ligningerne i (a) og bibetingelserne. Vis specielt, at $p(t) \leqslant 0$ for $0 \leqslant t \leqslant 2$.

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.