Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), maj-juni 2002

Differentialligninger og optimal kontrolteori

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet fylder 2 sider og består af 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner må benyttes. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen [S] (Sydsæter, Bind II), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

Betragt følgende differentialligning:

$$\dot{x} = \frac{(x-1)^3}{t^3} \qquad \text{for } t > 0.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(1) = \frac{1}{2}$.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + y^2 - 4, \\ g(x,y) &= 3x - y - 2. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x,y) = 0$, og kurven, hvor $g(x,y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\uparrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.

(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(1,0)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende inhomogene differensligning:

(*) $$x_{t+2} - \tfrac{3}{2}x_{t+1} + \tfrac{1}{2}x_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem den generelle løsning til den homogene differensligning, der svarer til (*).

(b) Bestem den løsning x_t til (*), som opfylder $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

(c) Afgør, om differensligningen (*) er stabil.

(d) Vis, at enhver løsning x_t til (*) er en konvergent følge.

Opgave 4

Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_1^2 (t\dot{x}^2 + t^{-1}x^2)\, dt, \quad \text{for } x(1) = 1, \text{ og } x(2) \text{ fri.}$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen. [Vink: vis, at funktionerne $x(t) = t$ og $x(t) = t^{-1}$ løser ligningen.]

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen, begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 5

Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\ln 2} (xu - x^2 - u^2)\, dt \quad \text{for } \dot{x} = -x + u,\ x(0) = 1,\ x(\ln 2) \text{ fri,}$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\ln 2} \big(x(t)u(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)\, dt \quad \text{for } \dot{x}(t) = -x(t) + u(t),\ x(0) = 1,\ x(\ln 2) \text{ fri.}$$

Der er altså ingen indskrænkninger på kontrolfunktionens værdier $u(t)$.

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de ligninger, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem de funktioner x, p og u, som opfylder ligningerne i (a) og bibetingelserne.

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.