Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juli 2001

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), …, som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	3	4	3	4	6
Opgavens vægt	15%	20%	15%	20%	30%

Bedømmelse. Der lægges vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra ugesedlerne (angiv nummer), kuglerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), … .

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

`Opgavesættet starter på næste side`

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Løs den *homogene differentialligning* (HL) $\dot{x} - 3t^{-1}x = 0\,, \quad t > 0.$

(b) Løs den *inhomogene differentialligning* (IL) $\dot{x} - 3t^{-1}x = 3t^2\,, \quad t > 0.$

(c) Bestem løsningen x til *Bernoulli-ligningen* $\dot{x} = t^{-1}x + t^2x^{-2}, \quad t > 0$ med $x(1) = 1$. [Benyt gerne resultatet fra (b).]

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} 1 - xy \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x - y^3 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og godtgør hvilke punkter, der er ustabile.

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$. Kan man udfra dette og Liapunovs sætninger (sml. side 265–266 eller • **32** og **34**) konkludere, at der er et lokalt asymptotisk stabilt ligevægtspunkt? Liapunov–funktioner ønskes **ikke** indraget i undersøgelserne!

(d) Bestem et lokalt sadelpunkt.

OPGAVE 3 (15 %). Betragt *differensligningen*

$$(*)\qquad 2x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

(b) Bestem løsningen til $(*)$ med $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$, og udregn værdierne x_2, x_3 og x_4.

(c) Afgør, om ligningen $(*)$ er stabil.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 4 (20 %). I denne opgave er $T \overset{\text{def}}{=\!=} \ln 2$. Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^T \big(x(t)^2 + 2t^2 x(t) + \dot{x}(t)^2\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = -2$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(T) = -T^2$, $x(T)$ *fri* eller $x(T) \geq -T^2$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = -2$.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T) = -T^2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T) \geq -T^2$.

OPGAVE 5 (30 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(-2tx(t) - u(t)^2\big)\,dt$$

når $\dot{x} = 2u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [-1, 1]$.

(a) Begrund, at Hamiltonfunktionen er konkav. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser (Max).

(b) Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser.

(c) Bestem den adjungerede funktion $p\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$.

(d) Bestem kontrolfunktionen u.

(e) Bestem funktionen x.

(f) Skitsér graferne for x, u og p. Begrund, at de løser problemet (Max).