KØBENHAVNS UNIVERSITETS INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juni 2001

HJÆLPEMIDLER. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

ANTAL OPGAVER OG VÆGTNING. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5%:

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	2	4	4	4	6
Opgavens vægt	10%	20%	20%	20%	30%

BEDØMMELSE. Der lægges vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra ugesedlerne (angiv nummer), kuglerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

RÆKKEFØLGE OG NY SIDE. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

`Opgavesættet starter på næste side`

OPGAVE 1 (10 %).

(a) Løs *differentialligningen*

$$(*) \qquad \dot{x} = t^{-1}x(x+1) \quad , \quad t \neq 0\,.$$

[Vink: Bestem blandt andet $a, b \in \mathbb{R}$, så $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.]

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -1$ samt løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -2$.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y - 7 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 9 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og godtgør hvilke punkter, der er ustabile.

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$.

(d) Afgør – gerne med henvisning til faseplananalysen – for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

OPGAVE 3 (20 %). Betragt *differensligningen*

$$(\text{IL}) \qquad x_{t+2} - 2x_{t+1} + 2x_t = 1 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots\,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* (HL) svarende til (IL).

(b) Bestem den fuldstændige løsning til (IL).

(c) Bestem løsningen til (IL) med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$, og udregn værdierne x_2, x_3 og x_4.

(d) Afgør, om ligningen (IL) er stabil.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^1 \left(4x(t)^2 - 8t^2x(t) + \dot{x}(t)^2\right)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = \frac{1}{2}$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(1) = \frac{3}{2}$, $x(1)$ *fri* eller $x(1) \geq \frac{3}{2}$,

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = \frac{3}{2}$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq \frac{3}{2}$.

OPGAVE 5 (30 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \left(6u(t) - x(t)^4\right)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser (Max).

(a) Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Begrund, at x er voksende. Begrund, at $\dot{p}(t) \geq 4$ for alle t, når $p\colon [\,0, 2\,] \to \mathbb{R}$ er den *adjungerede funktion.* Begrund, at $p(0) \leq -8$. [Vink: Til det sidste kan benyttes Nyttig Hjælpesætning (a) U 11 eller • 64.]

(c) Begrund, at der findes netop ét $a \in]\,0, 2\,[$ med $p(a) = -6$.

(d) Bestem $u(t)$ for $t < a$ og for $t > a$. Bestem $x(t)$ for $t \leq a$ og for $t \geq a$. Bestem $\dot{p}(t)$ for $t \leq a$ og for $t \geq a$.

(e) Bestem $p(t)$ for $t \geq a$. Bestem a. Bestem $p(t)$.

(f) Skitsér graferne for x, u og p. Løs problemet (Max).