Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
August 2000

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), . . . , som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	3	4	4	4	5
Opgavens vægt	15%	20%	20%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra ugesedlerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Løs *differentialligningen*

$$(\circ) \qquad \dot{x} = -t^{-2}x \quad , \quad t \neq 0\,.$$

(b) Bestem én løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad \dot{x} + t^{-2}x = 2t + 1 \quad , \quad t \neq 0\,.$$

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 2$.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x^2 + y^2 - 25 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} x^3 + 27 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (= ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i.

(c) Skitsér en mulig løsningsbane (= integralkurve), der går fra punktet $(-1,-2)$ til punktet $(-3,-4)$ og én fra $(-4,-5)$ til $(-3,-4)$. Beskriv for ethvert ligevægtspunkt hvilken konklusion vedrørende stabilitet, man kan drage på baggrund af faseplansanalysen i (b).

(d) Bestem $\underline{\underline{J}}(x,y)$. Afgør for hvert ligevægtspunkt, om det er *lokalt asymptotisk stabilt*, eller om det er *ustabilt.*

`Opgavesættet fortsætter på næste side`

OPGAVE 3 (20 %). Betragt *differensligningen*

$$(*) \qquad x_{t+2} - x_{t+1} + \frac{1}{2}x_t = 7 \quad , \quad t = 0, 1, \dots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* (∘) svarende til (∗).

(b) Bestem løsningen x_t til (∘) med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$, og udregn x_2.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til (∗).

(d) Afgør, om ligningen (∗) er stabil.

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\underline{\underline{\text{Min}}} \int_0^3 \big(6tx(t) + t^2\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 1$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(3) = 1$, $x(3)$ *fri* samt $x(3) \geq 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* $\underline{\underline{\text{EL}}}$ og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = 1$.

(b) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3) = 1$.

(c) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3)$ *fri*.

(d) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3) \geq 1$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\underline{\underline{\text{Max}}} \int_0^1 \big((t-1)x(t) - u(t)^2\big)\,dt$$

når $\dot{x} = u - x$, $x(0) = 1$, $x(1)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser $\underline{\underline{\text{Max}}}$. Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Bestem en *adjungeret funktion* $p\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(c) Begrund, at funktionen p er strengt voksende (f.eks. ved også at betragte dens anden afledede).

(d) Bestem en *kontrolfunktion* $u\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, og en *tilstandsfunktion* $x\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(e) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Max}}}$.