Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

DIFFERENTIALLIGNINGER OG OPTIMAL KONTROLTEORI
Juni 2000

Hjælpemidler. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt – inklusive lommeregnere.

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \dots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	4	4	3	4	5
Opgavens vægt	20%	20%	15%	20%	25%

Bedømmelse. Der lægges vægt på, at der gives udførlige begrundelser, og at der gives henvisninger, når der benyttes resultater fra ugesedlerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Aflevér besvarelsen af de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \dots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Aflevér besvarelsen af delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (20 %). Betragt *differentialligningen*

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 5e^t \,.$$

(a) Opskriv og løs den tilsvarende *karakteristiske ligning* (+).

(b) Opskriv den *homogene ligning* (∘) svarende til (∗), og bestem dens fuldstændige løsning. Afgør, om ligningen (∘) er *stabil.*

(c) Bestem en løsning til (∗).

(d) Bestem løsningen $x(t)$ til (∗) med $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 2$ og $\frac{d^2x}{dt^2}(0) = 3$.

OPGAVE 2 (20 %). Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} -x^2 + y \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} -y + 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$.

(b) Bestem samtlige *ligevægtspunkter* (= ligevægtstilstande) for (∗).

(c) Bestem $\underline{\underline{J}}(x,y)$. Afgør for hvert ligevægtspunkt, om det er *lokalt asymptotisk stabilt*, eller om det er *ustabilt.*

(d) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i. Kommentér resultatet i (c) på denne baggrund.

Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 3 (15 %). Betragt *differensligningen*

$$(*) \qquad x_{t+2} - 10x_{t+1} + 25x_t = 8 \cdot 3^t + 4^t \, .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* ($\circ$) svarende til ($*$).

(b) Bestem den fuldstændige løsning til ($*$).

(c) Bestem løsningen x_t til ($*$) med $x_1 = 10$ og $x_2 = 9$.

OPGAVE 4 (20 %). Betragt *variationsproblemet*

$$\underline{\underline{\text{Min}}} \int_0^1 \big(x(t) + \dot{x}(t)\big)^2 dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(1) = 1$, $x(1)$ *fri* samt $x(1) \geq 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* $\underline{\underline{\text{EL}}}$ og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = 0$.

(b) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1) = 1$.

(c) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 1$.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\underline{\underline{\text{Max}}} \int_0^3 \big(t^2 + 2(t-2)x(t) - u(t)^2\big) dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(3)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser $\underline{\underline{\text{Max}}}$. Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Bestem en *adjungeret funktion* $p \colon [\,0, 3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne, og skitsér dens graf.

(c) Bestem en *kontrolfunktion* $u \colon [\,0, 3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(d) Bestem en *tilstandsfunktion* $x \colon [\,0, 3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(e) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Max}}}$.