Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København



# MATEMATISK ANALYSE OG STATISK OPTIMERING
## November 2000

Antal opgaver og vægtning. Der er seks opgaver: $1, 2, \ldots, 6$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Opgave nummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Antal delopgaver | 3 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 |
| Opgavens vægt | 15% | 10% | 10% | 15% | 25% | 25% |

Samarbejde. Opgaverne kan løses i grupper bestående af *højst tre* deltagere, der alle skal deltage i eksamenen. Hver deltager skal individuelt indskrive sin besvarelse.

Erklæring. På besvarelsens første side skal der være *enten* en underskrevet erklæring om samarbejde med hver samarbejdspartners fulde navn *eller* en underskrevet erklæring om, at besvarelsen er helt selvstændigt udarbejdet.

Besvarelsen må højst fylde 20 standardsider (ud over ovennævnte erklæring). Den skal være tydelig, og den skal både være rimelig kort og indeholde udførlige begrundelser.

Henvisninger. Der lægges vægt på, at der gives henvisninger, når der benyttes et resultat fra noterne (angiv side), ugesedlerne (angiv nummer), kuglerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Besvar de seks opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 6$. Start hver opgave på en *ny* side. Besvar delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ....

Antal kopier. Besvarelsen afleveres i *to* kopier.

Afleveres senest fredag den 1. december kl. 12:00 i MØK–sekretariatet.

`Opgavesættet starter på næste side`

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Betragt funktionerne $\varphi, f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved henholdsvis $\varphi(x) = (1 + x\ln x)^{-1}$ og $f(x) = (1 + x\ln x)^{-2}(1 + \ln x)$. Bestem de afledede funktioner $\varphi'$ og $f'$.

(b) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + n\ln n)^{-2}(1 + \ln n)$ er konvergent.

(c) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + n\ln n)^{-2}\ln(n^2)$ er konvergent.

OPGAVE 2 (10 %).

(a) Løs ligningen $z^2 + z + 1 = 0$ i $\mathbb{C}$, bestem summen og produktet af løsningerne, og udregn $z^3$ for enhver løsning.

(b) Løs ligningen $z^6 = 1$ i $\mathbb{C}$, angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, og bestem summen og produktet af løsningerne.

OPGAVE 3 (10 %). Betragt mængden

$$W \overset{\text{def}}{=} \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \ \text{ og } \ e^{x-1} - 1 \leq y \leq 2\ln x \,\}\,.$$

(a) Antag, at $(x_k, y_k)$ er en konvergent punktfølge i $\mathbb{R}^2$ med grænsepunkt $(a,b)$, og antag, at $(x_k, y_k) \in W$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Begrund, at $(a,b)$ tilhører $W$.

(b) Begrund, at der findes $r \in \mathbb{R}$, så $2\ln x < e^{x-1} - 1$ for $x > r$. Begrund, at $W$ er kompakt.

OPGAVE 4 (15 %). Betragt kurven

$$N \overset{\text{def}}{=} \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + x^3 = 0 \,\}$$

Lad $L$ betegne mængden af punkter $(a,b) \in N$, så $N$ i et passende åbent rektangel om $(a,b)$ definerer $y$ som en $\mathrm{C}^1$–funktion $\varphi$ af $x$, og lad $M$ betegne mængden af punkter $(a,b) \in N$, så $N$ i et passende åbent rektangel om $(a,b)$ definerer $x$ som en $\mathrm{C}^1$–funktion $\psi$ af $y$.

(a) Skitsér $N$, og begrund, at punktet $(0,0)$ hverken tilhører $L$ eller $M$.

(b) Bestem mængderne $L$ og $M$. Angiv $\varphi(a)$ og bestem $\varphi'(a)$ for ethvert $(a,b) \in L$. Angiv $\psi'(b)$ for ethvert $(a,b) \in M$.

(c) Bestem et størst muligt åbent rektangel $W = A \times B$ om $(1, \sqrt{2})$, så der findes $\mathrm{C}^1$–funktion $\alpha\colon A \to B$ med $N \cap W = \{\, \big(x, \alpha(x)\big) \mid x \in A \,\}$. Bestem et eksplicit udtryk for $\alpha(x)$, og udregn $\alpha'(x)$ for alle $x \in A$.

`Opgavesættet fortsættes på næste side`

OPGAVE 5 (25 %). Betragt mængden

$$S \overset{\text{def}}{=} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^3 \leq y \;\text{ og }\; x^3 \leq y \leq 1 \},$$

funktionerne $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved henholdsvis

$$f_1(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^2 - 2y\,, \quad f_2(x,y) \overset{\text{def}}{=} -x^2 - 2y \;\text{ og }\; f_3(x,y) \overset{\text{def}}{=} 6x^2 - 2y$$

samt de tre optimeringsopgaver:

($P_1$) *Maksimér* $f_1(x,y)$ *når* $(x,y) \in S$;

($P_2$) *Maksimér* $f_2(x,y)$ *når* $(x,y) \in S$;

($P_3$) *Maksimér* $f_3(x,y)$ *når* $(x,y) \in S$.

(a) Skitsér mængden $S$. Begrund, at den er kompakt.

(b) Formulér problemerne ($P_1$), ($P_2$) og ($P_3$) ovenfor som Kuhn–Tucker problemer. Afgør for ethvert $(x,y) \in S$, om FøringsBetingelsen $\underline{\underline{\text{FB}}}$ er opfyldt i $(x,y)$.

(c) Løs problemet ($P_1$).

(d) Løs problemet ($P_2$).

(e) Løs problemet ($P_3$).

OPGAVE 6 (25 %). Betragt det generelle lineære program:

(P) *Maksimér* $x_1 - 2x_2 - 5x_3$
*under bibetingelserne* $x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$, $-x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$
*og fortegnskravene* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

(a) Omform (P) til et program (Q) på kanonisk form.

(b) Opstil det duale program (P'), og afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til programmet (Q), og løs dette.

(d) Løs det oprindelige program (P).

(e) Løs det duale program (P').

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby