Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

MATEMATISK ANALYSE OG STATISK OPTIMERING
December 1999

Antal opgaver og vægtning. Der er seks opgaver: $1, 2, \ldots, 6$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), . . . , som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5	6
Antal delopgaver	3	2	2	3	5	5
Opgavens vægt	15%	10%	10%	15%	25%	25%

Samarbejde. Opgaverne kan løses i grupper bestående af *højst tre* deltagere, der alle skal deltage i eksamenen. Hver deltager skal individuelt indskrive sin besvarelse.

Erklæring. På besvarelsens første side skal der være *enten* en underskrevet erklæring om samarbejde med hver samarbejdspartners fulde navn *eller* en underskrevet erklæring om, at besvarelsen er helt selvstændigt udarbejdet.

Besvarelsen må højst fylde 20 standardsider (ud over ovennævnte erklæring). Den skal være tydelig, og den skal både være rimelig kort og indeholde udførlige begrundelser.

Henvisninger. Der lægges vægt på, at der gives henvisninger, når der benyttes et resultat fra noterne (angiv side), ugesedlerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Besvar de seks opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 6$. Start hver opgave på en *ny* side. Besvar delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Antal kopier. Besvarelsen afleveres i *to* kopier.

`Opgavesættet starter på næste side`

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Bestem mængden A af reelle tal $a \geq 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n^2$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n$ er divergent.

(b) Bestem mængden B af reelle tal $b \geq 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} nb^n$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n b^n$ er divergent.

(c) Lad (x_n) og (y_n) være to følger af positive reelle tal, og betragt mængden C af reelle tal $c \geq 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n c^n$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} y_n c^n$ er divergent. Begrund, at C er et interval (eventuelt tomt), altså at der for alle $c_1, c_2 \in C$ og $c \in \mathbb{R}$ med $c_1 \leq c \leq c_2$ gælder $c \in C$.

OPGAVE 2 (10 %).

(a) Løs ligningen $z^3 - 2z + 4 = 0$ i $\mathbb{C}$. Angiv summen og produktet af løsningerne.

(b) Bestem en polynomiumsligning i $\mathbb{C}$ af lavest mulig grad, med reelle koefficienter og med 1, $2+i$ og $1+2i$ som løsninger. Afgør, om $1+i$ er løsning til denne ligning.

OPGAVE 3 (10 %). Lad der være givet en følge $g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots$ af kontinuerte funktioner $g_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betragt mængden

$$W \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \in \mathbb{R} \mid g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_m(x) \leq \cdots \,\}.$$

(a) Bevis, at der for enhver konvergent talfølge (x_n) med alle $x_n \in W$ gælder, at også grænseværdien tilhører W.

(b) Begrund, at W er lukket.

OPGAVE 4 (15 %). Betragt funktionen $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} x^3 - 3x - y$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ samt niveaukurven $N_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 2 \,\}$ svarende til niveauet 2.

Lad M_2 betegne mængden af punkter $(a,b) \in N_2$, så niveaukurven N_2 i et passende åbent rektangel om (a,b) definerer x som en C^1–funktion ψ af y, sml. også U8.

(a) Skitsér N_2. Begrund, at punktet $(-1,0)$ tilhører N_2, men ikke M_2.

(b) Bestem mængden M_2.

(c) Bestem $\psi'(b)$ for ethvert $(a,b) \in M_2$.

Opgavesættet fortsættes på næste side

OPGAVE 5 (25 %). Betragt mængden

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 1 \text{ og } -1 \leq y \leq 0 \,\}\,.$$

(a) Skitsér mængden S. Begrund, at den er lukket, og at den er kompakt.

(b) Afgør for ethvert $(x,y) \in S$, om **FB** (dvs. FøringsBetingelsen [Sydsæter 2, s. 210], sml. også U12) for ulighederne $x^2 - y \leq 1$, $y \leq 0$ og $-y \leq 1$ er opfyldt i (x,y).

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er funktionen $f_a : S \to \mathbb{R}$ givet ved $f_a(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + ay^2$ for $(x,y) \in S$, og man betragter det ikke-lineære problem:

$$\textit{Maksimér } f_a(x,y) \textit{ når } (x,y) \in S.$$

(c)&(d) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x,y) \in S$, hvori **FB** er opfyldt, om (x,y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB** (dvs. Kuhn–Tuckers Nødvendige Betingelser [Sydsæter 2, s. 210], sml. også U11).

(e) Begrund for ethvert $a \in \mathbb{R}$, at f_a har et maksimumspunkt i S, og angiv dette og maksimumsværdien.

OPGAVE 6 (25 %). Betragt det generelle lineære program:

(P) *Maksimér* $3x_1 + 5x_2$
under bibetingelserne $x_1 + x_2 \leq 1$, $2x_1 + 2x_2 \leq 1$, $x_1 + 2x_2 \leq 0$, $-x_1 - x_2 \leq 0$
og ingen fortegnskrav.

(a) Opstil det duale program (P'). Begrund, at det er på kanonisk form.

(b) Afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til det duale program (P').

(d) Løs det duale program (P').

(e) Løs det oprindelige program (P).

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby