Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København vinteren 1998–1999

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
24. november – 8. december 1998

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden tirsdag den 8. december 1998 kl. 12 i MØK-sekretariatet..

Det gælder for samtlige opgaver, at svarene skal begrundes.

Opgave 1 (Vægt 20%)

a) Man betragter talfølgen

$$x_n = (1 - a + e^{-an}) \cos(an),$$

hvor a er et givet tal i intervallet $[0, 2\pi]$. Find $\liminf_{n\to\infty} x_n$ og $\limsup_{n\to\infty} x_n$ i tilfældene hvor a er et af tallene

$$0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{4},\ 1, \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi.$$

For hvilke af disse værdier af a er talfølgen konvergent?

b) Undersøg, for hvilke værdier af $b \geq 0$ og $c \geq 0$, følgende rækker er konvergente:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)b^n, \tag{1}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n>c} \Big(\frac{1}{n-c} - \frac{1}{n+c}\Big). \tag{2}$$

Find summen af (1) i tilfælde af konvergens. Find summen af (2) i tilfældet $c = 2$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (Vægt 10%)

a) Find samtlige løsninger til ligningen

$$z^4 = -16,$$

angivet på formen $a + ib$.

b) Vis, at et komplekst tal $z \neq 0$ har $|z| = 1$, hvis og kun hvis $\overline{z} = 1/z$.

Opgave 3 (Vægt 15%)

Man betragter funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

1° Vis, at f er kontinuert og differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$, men at f ikke tilhører $C^1(\mathbb{R})$.

2° Undersøg, om der findes et interval $I = [-\delta, \delta]$ med $\delta > 0$, så at f afbilder I *enentydigt* på $f(I)$.

Opgave 4 (Vægt 15%)

Undersøg, hvilke af følgende mængder i $\mathbb{R}^2$ er kompakte:

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{y+1} \,\},$$

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{y+1} \,\},$$

$$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < 3,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{y+1} \,\}.$$

Skitsér de tre mængder.

Opgave 5 (Vægt 20%)

Man betragter det ikke-lineære maksimeringsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Maksimér } f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ &\text{under bibet. } x^2 + y^2 \leq 4, \\ &\qquad 2x + y \geq 1. \end{aligned}$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

Problemet ønskes løst; herunder opskrives problemet på form som i Sydsæter II Afsnit 4.13, og der besvares følgende:

1° Find, hvilke punkter der opfylder Kuhn-Tucker's nødvendige betingelser.
2° Vis, at sådanne punkter tillige opfylder Kuhn-Tucker's tilstrækkelige betinglser.

Opgave 6 (Vægt 20%)

Man betragter maksimeringsprogrammet:

$$
\text{(P)} \qquad
\begin{aligned}
&\text{Maksimér } x_1 - x_2 \\
&\text{under bibet. } -3x_1 + x_2 \leq 2, \\
&\qquad\qquad x_1 - a x_2 \leq 1, \\
&\text{med fortegnskravet } x_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Her er a er en given, positiv konstant.

1° Skitsér mængden M af tilladte løsninger til (P), for hvert $a > 0$.
2° Opskriv det duale program (P′), og skitsér mængden M′ af tilladte løsninger til (P′), for hvert $a > 0$.
3° Angiv, for hver værdi af a, hvilket tilfælde af Hovedsætningens fire muligheder, der indtræffer. (Hovedsætningen er Sætning 6.1 i de udleverede noter af B. Fuglede om lineær optimering.)
4° Find samtlige løsninger til (P) og (P′) med angivelse af optimale værdier, i de tilfælde hvor problemerne har løsning.