

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik

28. juli – 11. august 1998

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden den 11. august 1998 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

i) Lad a være et ikke negativt reelt tal. Der er givet 3 rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)a^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n!)a^n.$$

Find for hver række mængden af de reelle tal a for hvilke rækken er konvergent.

ii) Lad a_1 være et reelt tal større end 1. Definer successivt $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n})$ for $n \geq 1$. Begrund, at $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en konvergent talfølge og bestem dens grænseværdi.

Opgave 2 (Vægt 15%)

Løs ligningen

$$z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 8z + 4 = 0.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $z = a + ib$.

Opgave 3 (Vægt 10%)

Der er givet en delmængde M af \mathbb{R}^3 ved ulighederne

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in M \Leftrightarrow y^2 - 2y + z^2 - 2z + 1 \leq 0 \text{ og } x^2 - 3x \leq 0.$$

- i) Tegn en skitse af M .
- ii) Begrund, at M er kompakt.
- iii) Find et indre punkt i M og begrund ud fra definitionen af et indre punkt, at det valgte punkt er indre.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$F(x, y, u, v) = (\sin(u^2v^2 - x + y) + (1 + u)^4 - 1, e^{xyuv} - x^2).$$

- i) Begrund, at der findes en omegn W af $(1, 1)$ i \mathbb{R}^2 og en differentiabel funktion G defineret på W med værdier i \mathbb{R}^2 således at for $G = (g_1, g_2)$ gælder

$$G(1, 1) = (g_1(1, 1), g_2(1, 1)) = (0, 1) \text{ og} \\ \forall (x, y) \in W : F(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = (0, 0).$$

- ii) Bestem Jacobimatricen for G i punktet $(1, 1)$.

Lad $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$H(s, t) = (\cos(s^2t^2) + \sin(t), e^{s^2+t^2} + s).$$

- iii) Vis, at $H(0, 0) = (1, 1)$ og begrund, at funktionen $K = G \circ H$ er defineret og differentiabel på en omegn U af $(0, 0)$.
- iv) Bestem Jacobimatricen for K i $(0, 0)$.

Opgave 5 (Vægt 25%)

Der er givet et maksimeringsproblem

$$\text{maksimer } \ln(4 - x^4 - x^2y - y^2 - z^2)$$

under bibetingelserne

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y + z \geq 1.$$

- i) Opskriv den tilhørende Lagrangefunktion og begrund at den er konkav som funktion af (x, y, z) .
- ii) Løs problemet.

Opgave 6 (Vægt 15%)

Der er givet et lineært standard maximeringsproblem (P)

$$\text{maksimer } 7x_1 + 9x_2 + 13x_3$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2 \\x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 3 \\2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1.\end{aligned}$$

- i) Opskriv det tilhørende duale problem (P').
- ii) Begrund, at både (P) og (P') må have optimale løsninger.
- iii) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.
- iv) Løs både (P) og (P').