Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København vinteren 1997-1998

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
20. november – 4. december 1997

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden torsdag den 4. december 1997 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

a) Der er givet nedenstående 2 rækker med positive led

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!2^n}{(n+3)!3^n}\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)n}.$$

Bevis, at begge rækker er konvergente.

b) Talfølgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er givet rekursivt ved

$$x_1 = 0$$
$$x_{n+1} = x_n + \cos x_n\,.$$

Som sædvanligt opfattes x_n som buemålet, dvs. enheden er radianer når $\cos x_n$ skal beregnes.

Vis, at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en begrænset voksende talfølge. Begrund, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent og bestem dens grænseværdi. *Vink*: En skitse af enhedscirklen, hvor buen med længde x_n er indtegnet, er en hjælp.

Opgave 2 (Vægt 15%)

Løs ligningen

$$z^6 + 11z^4 + 22z^2 + 36 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $a + ib$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 10%)

Lad M være den delmængde af $\mathbb{R}^3$ der består af de punkter (x, y, z) som opfylder følgende uligheder.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y &\leq -4 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y - z^2 &\leq -5 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + z &\leq -3 \\ z &\geq 0\,. \end{aligned}$$

a) Lav en skitse af M's snit med planen $y = 2$.
b) Lav en skitse af M og begrund, at M er kompakt.
c) Begrund, at $(1, 2, 1)$ er et indre punkt i M.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ved $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ hvor

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_6) &= e^{x_3 x_4} - x_1 x_3 \\ f_2(x_1, \ldots, x_6) &= \sin(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) \\ f_3(x_1, \ldots, x_6) &= -x_1 x_3 - x_2 x_3 - x_1 x_6 - x_2 x_6 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_6 + x_5 x_6\,. \end{aligned}$$

a) Lad k være et naturligt tal. Begrund, at funktionerne f_1, f_2, f_3 alle er af klasse C^k.
b) Vis, at $F(1, 0, 1, 0, 1, \pi) = (0, 0, 0)$ og begrund, at der findes en differentiabel afbildning G defineret på en omegn W af $(1, 0, 1)$ i $\mathbb{R}^3$ med værdier i $\mathbb{R}^3$ således at $G(1, 0, 1) = (0, 1, \pi)$ og for alle $z \in W$ gælder $F(z, G(z)) = (0, 0, 0)$.
c) Beregn Jacobimatricen $J_G(1, 0, 1)$ for G i punktet $(1, 0, 1)$.
Lad $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $H(y_1, y_2, y_3) = (y_1 y_2, y_1 + y_2)$ og lad $K : W \to \mathbb{R}^2$ være givet som $K = H \circ G$.
d) Beregn Jacobimatricen $J_K(1, 0, 1)$ for K i punktet $(1, 0, 1)$.

Opgave 5 (Vægt 20%)

Der er givet minimeringsproblemet

$$\min x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + z^2 \text{ u.b. } x \leq 0, \quad 1 \leq x + y + z, \quad z \leq 0.$$

a) Vis, at problemet kan omskrives til et konkavt maksimeringsproblem.
b) Løs problemet og find Kuhn-Tucker vektoren hørende til det konkave problem. Det skal af besvarelsen klart fremgå hvorledes løsningen er fundet.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt 20%)

Der er givet et lineært optimeringsproblem (P) Maksimer $2x_1 - 3x_2 + x_3$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

a) Opskriv det duale problem (P′).

b) Bevis, at (P) har en optimalløsning.

c) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.

d) Løs både (P) og (P′).