Handelshøjskolen i København
Københavns Universitet

Matematik H2

Opgave til besvarelse i 14 dage.
Opgaven udleveres 28. juli 1997

Opgave 1 (vægt 15%)

a) Afgør om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ er konvergent.
b) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^2}$ er konvergent med sum mindre eller lig 1/2.

Opgave 2 (vægt 15%)

Find samtlige rødder i ligningen

$$z^5 - z^3 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $a + ib$.

Opgave 3 (vægt 10%)

a) Lav en skitse af mængden M givet ved

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, \wedge \, x + y + z \geq 1\}\,.$$

b) Begrund, at M er kompakt.
c) Vis, at $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er et indre punkt af M.

opgavesættet fortsættes

Opgave 4 (vægt 15%)

Mængderne A og B i $\mathbb{R}^3$ er givet ved

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z \leq -9\}$$

a) Begrund, at A og B er konvekse.
b) Vis, at A og B er disjunkte.
c) Find en separerende hyperplan H og angiv tilhørende åbne halvrum J_1 og J_2 således at
$$A \subseteq J_1 \text{ og } B \subseteq J_2 \,.$$

Opgave 5 (vægt 20%)

Betragt minimeringsproblemet.
Minimer $3x^4 + 9y^4 - 6x^2y^2$ under bibetingelserne $x \geq 1$, $y \geq 1$, $y^2 - 2y \leq 0$.
a) Vis, at problemet er konvekst.
b) Find den optimale løsning og angiv den tilhørende Kuhn Tucker vektor.

Opgave 6 (vægt 25%)

Der er givet et lineært optimeringsproblem (P).

(P) Minimer $x_1 + 3x_2 + x_3$ under bibetingelserne

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \geq 4 \\ x_1 + x_2 & \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\,.$$

a) Opskriv det duale problem (P^*).
b) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem (Q).
c) Vis, at både (P) og (P^*) har optimale løsninger.
d) Løs (P) og (P^*).