Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København vinteren 1996-1997

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
21. november – 5. december 1996

Opgaven består af nedenstående 7 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden torsdag den 5. december 1996 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

a) Begrund for hver af nedenstående 3 rækker, at den er konvergent.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln(2)\ln(3)\cdots\ln(n)}{n!}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(n)}{2^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}})\sin(\dfrac{1}{n})$.

b) Find en majorant for summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}})\sin(\dfrac{1}{n})$.

Opgave 2 (Vægt 10%)

Find de komplekse løsninger til ligningerne

a) $z^2 + 10z + 41 = 0$.
b) $z^6 = -64$.

Løsningerne ønskes angivet eksakt og på formen $a + ib$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 10%)

Lad A være den delmængde af $\mathbb{R}^3$, der er bestemt ved

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \text{ og } z \geq 0 \text{ og } x + z \leq 4\right\} .$$

a) Tegn en skitse af A.
b) Begrund, at A er kompakt.

Opgave 4 (Vægt 15%)

Lad funktionen $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6 \\ \\ x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 - 4 \\ \\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_4^2 + \frac{3}{2}x_5^2 + 2x_6^2 \end{pmatrix} .$$

a) Begrund, at ligningen $F(\boldsymbol{x}) = 0$ fastlægger en differentiabel funktion $G = (g_1, g_2, g_3)$ defineret på en omegn U af punktet $(1,1,1)$ i $\mathbb{R}^3$ og med værdier i $\mathbb{R}^3$ således at $G(1,1,1) = (2,1,1)$ og

$$\forall\, (x_1,x_2,x_3) \in U : F(x_1,x_2,x_3,g_1(x_1,x_2,x_3),g_2(x_1,x_2,x_3),g_3(x_1,x_2,x_3)) = 0 .$$

b) Bestem Jacobimatricen $G'(1,1,1)$.
c) Lad $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være givet som

$$h(y_1,y_2,y_3) = y_1 - y_2^2 - y_3^3 ,$$

og lad $k : U \to \mathbb{R}$ være givet ved $k = h \circ G$. Beregn den retningsafledede af k i punktet $(1,1,1)$ efter retningen $(1,-2,0)$.

Opgave 5 (Vægt 20%)

a) Minimer $f_0(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3$ under bibetingelserne

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \leq 8 \text{ og } x_1 + x_2 \geq 1 \text{ og } x_1 - x_2 \geq 1 .$$

b) Vis, at funktionen $\sin((2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3)/25)$ har minimum i samme punkt som f_0 under de samme bibetingelser.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt 10%)

a) Lad C_1 og C_2 være de lukkede konvekse delmængder af $\mathbb{R}^2$, som er givet ved

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ og } x^2 - y^2 \geq 1\}\,.$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ og } y^2 - x^2 \geq 1\}\,.$$

Find en hyperplan $H(\boldsymbol{u}, \alpha)$ som separerer C_1 og C_2.

b) Lad C_1 og C_2 være de åbne kugler i $\mathbb{R}^3$, givet ved

$$C_1 = K((-1, -1, 0), 1)$$

$$C_2 = K((0, 1, 2), 1)\,.$$

Begrund, at C_1 og C_2 er disjunkte og konvekse.
Find en separerende hyperplan $H(\boldsymbol{u}, \alpha)$ som opfylder

$$\sup\{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_1 \in C_1\} < \alpha < \inf\{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_2 \in C_2\}\,.$$

Opgave 7 (Vægt 20%)

Der er givet et standard minimeringsproblem (P)

(P) Minimer $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$

under bibetingelserne

$$\begin{array}{rrrrl} -6x_1 - & x_2 + & 4x_3 - & 4x_4 \geq & 2 \\ x_1 + & 2x_2 & - & x_4 \geq & 0 \\ 4x_1 & - & x_3 - & 3x_4 \geq & 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0\,.$$

a) Opskriv det duale problem (P^*).

b) Begrund, at (P) og (P^*) begge har optimale løsninger.

c) Opskriv det til (P) hørende kanoniske minimeringsproblem.

d) Løs (P) og (P^*).