HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/matematik studiet

Øvelsesrække i matematik, 2. år, 1990-91

2. opgave i rækken

Opgaven består af nedenstående 7 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige vægte. Alle hjælpemidler er tilladt. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Besvarelsen, som ikke bør overstige 25 A4-sider, underskrives af eksaminanden og afleveres i *3 eksemplarer* inden torsdag den 29. maj 1991 kl. 12.

Opgave 1 (15%)

For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lader vi funktionen $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f_{\alpha,\beta}(x, y) = x^\alpha e^{\beta y} \ , \ x \in \mathbb{R}_+ \, , \ y \in \mathbb{R} \, .$$

a) For hvilke værdier af α og β er $f_{\alpha,\beta}$ en konveks funktion på $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$?

b) Begrund, at funktionen $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x, y) = x^{-1}e^y + \frac{1}{2}x^2 - 4y + 3 \, , \ x \in \mathbb{R}_+ \, , \ y \in \mathbb{R} \, ,$$

er konveks.

c) Find samtlige minimumspunkter for g.

Opgave 2 (10%)

Lad funktionerne f_1, f_2, f_3 fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ være givet ved

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - |x| & \text{for } \ x > 0 \\ \infty & \text{for } \ x \leq 0 \end{cases} ,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - |x| & \text{for } \ x < 0 \\ \infty & \text{for } \ x \geq 0 \end{cases} ,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

$$f_3(x) = x^2 - |x| \quad , \; x \in \mathbb{R} \; .$$

a) Begrund, at funktionerne f_1 og f_2 er konvekse, og at f_3 ikke er konveks.
b) Bestem afslutningerne cl f_1 og cl f_2 af funktionerne f_1 og f_2.
c) Find subdifferentialerne $\partial(\text{cl } f_1)(a)$ og $\partial(\text{cl } f_2)(a)$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

Opgave 3 (15%)

Lad den konvekse mængde $C \subseteq \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 \leq 0 \; , \; x - y + 1 \geq 0 \; , \; x^2 + y^2 \leq 1\} \; ,$$

og lad funktionen $f : C \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = 9x^2 + y^2 + 6xy - 24x - 8y \; .$$

a) Vis, at f er en konveks funktion.
b) Tegn en skitse af C og angiv normalkeglen $N_C(a)$ til C for ethvert $a \in C$, gerne på en tegning.
c) Find samtlige minimumspunkter for f.

Opgave 4 (15%)

a) Gør rede for, at følgende kan opfattes som et konvekst program:
(P) Minimer $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + z^2 + x - y$ over $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, z \geq 0\}$ under hensyn til

$$x - 3z + 1 \leq 0 \; , \; x^2 + 2z^2 - 3x + 3y - 1 \leq 0 \; .$$

b) Vis, at der findes netop een optimal løsning og netop een Kuhn-Tucker vektor for (P), og find disse samt den optimale værdi for (P).

Opgave 5 (15%)

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{4 - 6t^2}{(2 + t^2)^2} \right) x = 4 + 2t^2 \; , \; t \in \mathbb{R} \; .$$

a) Vis, at funktionen $t \to \frac{1}{2+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, er en løsning til den til $(*)$ svarende homogene ligning.
b) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.
c) Find den løsning til $(*)$, der opfylder $x(0) = 0$ og $x'(0) = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (15%)

Betragt differentialligningen

$$(**) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{(2-x)^2}{t} \quad , \; t \in \mathbb{R}_+ \, .$$

a) Find samtlige konstante løsninger til (**).

b) Begrund, at der gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ går højst een maksimal løsning til (**).

c) Vis, at enhver løsning til (**), der antager værdien 2, er konstant.

d) Find samtlige maksimale løsninger til (**).

e) Bestem den maksimale løsning, for hvilken $x(1) = 0$.

Opgave 7 (15%)

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 7x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 2e^t + 2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 10x_1 + 4x_2 - 8x_3 - e^t - 1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2e^t + 2 \end{aligned}$$

for $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$.

b) Bestem den partikulære løsning, for hvilken $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 0, 6)$.