Handelshøjskolen I København
Erhvervsøkonomi/matematik studiet, vinteren 1990-91

Øvelsesrække i matematik, 2. år

1. opgave i rækken

Opgaven består af nedenstående 8 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige vægte. Alle hjælpemidler er tilladt. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Besvarelsen, som ikke bør overstige 25 A4-sider, underskrives af eksaminanden og afleveres i *3 eksemplarer* inden mandag den 7. januar 1991 kl. 12.

Opgave 1 (5%)

a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

er divergent.

b) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

er konvergent.

Opgave 2 (10%)

Gør rede for, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^u - u^2 + v - x^2 - y^2 &= 1 \\ u^3 - u + v^2 - xy \sin u &= 1 \end{aligned}$$

i en omegn af punktet $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ fastlægger u og v som C^∞-funktioner $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$ af x og y.

Beregn funktionalmatricen Dg i punktet $(1, 0)$, hvor $g = \binom{g_1}{g_2}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (10%)

Betragt afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$F(x,y) = \left(e^{-2y} + x(1+y)\, ,\, 2e^{xy} - 3y\right) .$$

Gør rede for, at der findes en åben omegn U omkring punktet $(2,0)$, således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $V = F(U)$ omkring $F(2,0)$, og således at den omvendte afbildning $G : F(U) \to U$ til restriktionen af F til U er en C^∞-afbildning.

Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(2,0)$.

Opgave 4 (15%)

Lad funktionerne f, g_1 og g_2 fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$ være givet ved

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 4x^2 + z^2 + 4xz - y + z \, , \\ g_1(x,y,z) &= y^2 - 4x - 2z \, , \\ g_2(x,y,z) &= y + z \, . \end{aligned}$$

a) Vis, at der højst findes eet punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, i hvilket f har lokalt ekstremum under bibetingelserne

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= -1 \\ g_2(x,y,z) &= 2 \end{aligned}$$

og find dette punkt.

b) Det kan vises, at ovennævnte punkt (x_0, y_0, z_0) er et minimumspunkt for f under de nævnte bibetingelser, samt at f har netop eet minimumspunkt $\big(x_0(a,b),\, y_0(a,b),\, z_0(a,b)\big)$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= a \\ g_2(x,y,z) &= b \, , \end{aligned}$$

for ethvert (a,b) i en omegn af $(-1,2)$. Dette antages for givet i det følgende, og vi lader

$$\tilde{f}(a,b) = f\big(x_0(a,b)\, ,\, y_0(a,b)\, ,\, z_0(a,b)\big)$$

for (a,b) i ovennævnte omegn af $(-1,2)$.

Bestem $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial a}$ og $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial b}$ i punktet $(-1,2)$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Handelshøjskolen I København
Erhvervsøkonomi/matematik studiet, vinteren 1990-91
Øvelsesrække i matematik, 2. år

Opgave 5 (15%)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^3$ være cirkelskiven givet ved

$$U = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 - x \leq 0\}$$

og lad $T \subseteq \mathbb{R}^3$ være trekanten givet ved

$$T = \{(x, y, 0) \mid x + y \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}\,.$$

Sæt

$$C_1 = \operatorname{conv}\big(U \cup \{(0,0,1)\,,\ (2,0,-1)\}\big)$$

og

$$C_2 = \operatorname{conv}\big(T \cup \{(0,0,1)\,,\ (2,0,-1)\}\big)$$

a) Angiv mængden af hjørner i C_1.
b) Er C_1 et konvekst polyeder?
c) Begrund, at C_2 er et simplex og bestem dets hjørner.
d) Fremstil punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ som affin kombination af hjørnerne i C_2 og begrund, at dette punkt tilhører C_2.

Opgave 6 (15%)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^4$ være det affine underrum givet ved

$$A = \operatorname{aff}\{(1,1,1,1)\,,\ (2,2,2,0)\,,\ (1,7,3,0)\,,\ (0,-6,-2,3)\}\,.$$

a) Find en affin basis for A.
b) Bestem en (lineær) basis for det lineære underrum L, som er parallelt med A, d.v.s. for hvilket

$$A = z + L$$

for et $z \in \mathbb{R}^4$.
c) Begrund, at sættet $(2,1,-3,0)\,,\ (0,-1,5,4)$ er en (lineær) basis for det ortogonale komplement $L^\perp$ til L.
d) Find et lineært ligningssystem, hvis løsningsmængde er A.

Vink. Man kan benytte metoden i beviset for sætn. 4.2 i noterne om konveksitet.

Opgavesættet fortsættes på side 4

Opgave 7 (15%)

Lad $B_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ og $B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$B_1 = \{(x, y, z) \mid x \le 0\,,\ y \le 0\,,\ z \le 0\}$$

og

$$B_2 = \operatorname{conv}\{(1,0,0)\,,\ (0,0,1)\,,\ (0,2,0)\,,\ (5,3,2)\}\ .$$

a) Begrund, at $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

b) Begrund, at $d(B_1, B_2) > 0$, og at der findes punkter $x_1 \in B_1$ og $x_2 \in B_2$, således at

$$|x_1 - x_2| = d(B_1, B_2)\ .$$

c) Bestem $x_1 \in B_1$ og $x_2 \in B_2$, så $|x_1 - x_2| = d(B_1, B_2)$, gerne ved brug af geometriske argumenter.

d) Find $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ og $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, således at $\alpha_1 < \alpha_2$, og således at hyperplanen $H(y, \alpha)$ separerer B_1 og B_2 for $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$.

Opgave 8 (15%)

Betragt følgende lineære program:

(P) Maksimer $-2x_1 + x_2$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 6x_3 &= -3 \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 5 \end{aligned}$$

og fortegnskravene $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

a) Omform (P) til et kanonisk lineært program (Q).

b) Find samtlige tilladte basisløsninger til (Q).

c) Opskriv det duale program (P') til (P) og find en tilladt løsning til (P').

d) Begrund, at (P) og (P') har optimale løsninger.

e) Find en optimal løsning til (P).