HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/matematik studiet

Øvelsesrække i matematik, 2. år, 1989-90

2. opgave i rækken

Opgaven består af nedenstående 7 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige vægte. Alle hjælpemidler er tilladt. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Besvarelsen, som ikke bør overstige 25 A4-sider, underskrives af eksaminanden og afleveres i *3 eksemplarer* inden torsdag den 31. maj 1990 kl. 12.

Opgave 1 (10%)

1°) Vis, at funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \max\{e^{2x}, e^{-3x}\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

er konveks.

2°) Find subdifferentialet $\partial f(a)$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

3°) Find samtlige minimumspunkter for f.

Opgave 2 (15%)

For hvert $t \in \mathbb{R}$ betegner $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funktionen givet ved

$$f_t(x, y, z) = 2tx^2 + (4-t)y^2 + (4-t)z^2 - (4+2t)yz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1°) For hvilke værdier af t er funktionen $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ konveks ?

2°) Bestem samtlige minimumspunkter for $f_{\frac{1}{2}}$ og f_1.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (10%)

Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + |y|\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1°) Vis, at f er konveks.

2°) Bestem subdifferentialet $\partial f(a)$ for ethvert $a \in \mathbb{R}^2$.

3°) Bestem mængden af de punkter, i hvilke f ikke er differentiabel.

Opgave 4 (20%)

1°) Gør rede for, at følgende kan opfattes som et konvekst program:

(P) Minimer $f(x,y) = x^2+y^2-20x-2y$ over $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\}$ under hensyn til

$$x^2+y^2 \leq 13\,, \quad x^2 - y \leq 1\,.$$

2°) Begrund, at der findes mindst een Kuhn-Tucker vektor for (P).

3°) Find samtlige Kuhn-Tucker vektorer og samtlige optimale løsninger for (P).

Opgave 5 (15%)

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)y^n\,,$$

hvor P og Q er kontinuerte funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og hvor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

1°) Vis, at hvis φ er en løsning til $(*)$, så er $\psi = \varphi^{1-n}$ (d.v.s. $\psi(t) = (\varphi(t))^{1-n}$) en løsning til differentialligningen

$$(**) \qquad \frac{dz}{dt} + (1-n)P(t)z = (1-n)Q(t)\,,$$

i de intervaller, hvor ψ er veldefineret (d.v.s. i de intervaller, hvor $\varphi \neq 0$, hvis $n \geq 2$).

2°) Benyt 1°) til at finde en maksimal løsning φ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + y = 2te^t y^2\,,$$

som opfylder $\varphi(0) = 1$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (15%)

Betragt differentialligningen

$$(***) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 4t\frac{dy}{dt} + (4t^2-2)y = te^{t^2+t}\,, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

1°) Find en konstant $\alpha \in \mathbb{R}$, således at funktionen $t \to e^{\alpha t^2}$ er en løsning til den tilhørende homogene ligning.

2°) Bestem samtlige maksimale løsninger til $(***)$ i $\mathbb{R}$.

3°) Find den løsning φ til $(***)$, som opfylder $\varphi(0) = 0$ og $\varphi(2) = 0$.

Opgave 7 (15%)

Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = 4tx_1 - tx_2 + 7t$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2tx_1 + tx_2 + 8t$$

for $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, og bestem den partikulære løsning, for hvilken $(x_1(0)\,,\; x_2(0)) = (3,1)$.

Vink. Vis først, at der findes en 2×2-matrix $\underline{\underline{S}}$, som er uafhængig af t, således at

$$\underline{\underline{S}}\begin{pmatrix} 4t & -t \\ 2t & t \end{pmatrix}\underline{\underline{S}}^{-1}$$

er en diagonalmatrix. Eller skift til en passende, ny uafhængig variabel.