HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/matematik studiet

Øvelsesrække i matematik, 2. år, 1989-90

1. opgave i rækken

Opgaven består af nedenstående 7 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige vægte. Alle hjælpemidler er tilladt. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Besvarelsen, som ikke bør overstige 25 A4-sider, underskrives af eksaminanden og afleveres i *3 eksemplarer* inden mandag den 8. januar 1990 kl. 12.

Opgave 1 (10%)

a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{n}}$$

er divergent.

b) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n \cdot 2^n}$$

er konvergent, og find en (endelig) øvre grænse for dens sum. Svaret kræves begrundet.

Opgave 2 (10%)

Gør rede for, at ligningsystemet

$$\begin{aligned} &x^2 - xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2 = 10 \\ &xyz = 6 \end{aligned}$$

i en omegn af punktet $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ fastlægger x og y som C^∞-funktioner $x = g_1(z)$, $y = g_2(z)$ af z, og beregn ${g_1}'(1)$ og ${g_2}'(1)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (10%)

Lad $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$F(x,y) = (x^3 - 3xy^2\,,\, -y^3 + 3x^2y)\,.$$

a) Begrund, at der for hvert $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ findes en åben omegn U omkring (x_0, y_0), således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $F(U)$ omkring $F(x_0, y_0)$, og således at den inverse afbildning $G : F(U) \to U$ til restriktionen af F til U er en C^∞-afbildning.

b) Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(1,2)$.

Opgave 4 (15%)

a) Find samtlige lokale ekstremumspunkter for funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y,z) = x + y + 2z$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0\,, \\ &x + 2y \leq 0\,. \end{aligned}$$

b) Begrund, at de fundne punkter også er globale ekstremumspunkter.

Vink. Vis, at mængden af punkter i $\mathbb{R}^3$, der opfylder bibetingelserne, er kompakt.

Opgave 5 (15%)

I $\mathbb{R}^3$ betragtes punkterne $x_1 = (1,1,0)$, $x_2 = (2,1,1)$, $x_3 = (0,1,-1)$ og $x_4 = (4,1,3)$. Lad

$$A = \operatorname{aff}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\,.$$

a) Vis, at (x_1, x_2) er en affin basis for A.

b) Begrund, at der findes netop een affin afbildning $f : A \to \mathbb{R}^2$, således at $f(x_1) = (1,0)$ og $f(x_2) = (2,1)$, og beregn $f(x_3)$ og $f(x_4)$.

c) Bestem en affin basis for $f(A)$.

d) Tilhører $(12,1)$ billedmængden $f(A)$? Svaret kræves begrundet.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (20%)

Lad

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

og $$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\,,\ y \geq \frac{1}{2}\,,\ x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

a) Tegn mængden $K_1 = \operatorname{conv}(M_1 \cup \{(0,2,0)\})$.

Er K_1 en konveks polytop ?

b) Tegn dernæst mængden

$$K_2 = \operatorname{conv}(M_2 \cup \{(0,2,0)\,,\ (0,0,0)\})$$

og begrund, at K_2 er en konveks polytop.

Find dens hjørner.

c) Vis, at $(\frac{1}{2}, 1, 0) \in K_2$ og udtryk dette punkt som en konveks kombination af det mindst mulige antal hjørner i K_2.

d) Lad nu K_3 være den afsluttede kugle med centrum $(\sqrt{3}, 1, 0)$ og radius 1.

Vis, at der findes netop een hyperplan i $\mathbb{R}^3$, som separerer K_1 og K_3, og find en ligning for denne.

Forklar om separationen er egentlig eller stærk eller begge dele.

Opgave 7 (20%)

Betragt følgende lineære program

(P) Maksimer $5x + 8y - 20z$ under hensyn til bibetingelserne

$$x + 3y - 4z \leq 1$$
$$3x + 2y - 5z \leq 2$$

samt fortegnskravene

$$x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,.$$

a) Find en tilladt løsning til (P).

b) Opskriv det duale program (P') til (P) og find en tilladt løsning til (P').

c) Begrund, at (P) og (P') har optimale løsninger.

d) Omform (P) til et kanonisk program (Q) (d.v.s. indfør restvariable), og find samtlige tilladte basisløsninger for (Q).

e) Find de optimale løsninger for (P).

f) Find de optimale løsninger for (P').