Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
2. december – 5. december 2003

Opgaven udleveres tirsdag den 2. december kl. 10.00 på MØK-sekretariatet. Opgavebesvarelsen afleveres på MØK-sekretariatet fredag den 5. december 2003, senest kl. 10.00.

Opgavesættet indeholder 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen (Sydsæter, bind II [S], eventuelt til den gamle udgave [$\mathrm{S_{gl}}$]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), eller til ugesedlerne.

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, den skal være renskrevet på enkeltark i A4 format, og den må højst fylde 15 sider ud over forsiden. Den vedføjede side (eller en kopi af siden) skal anvendes som forside, og den skal udfyldes med cpr.nr. i øverste højre hjørne og navn og underskrift. Ved afleveringen skal forsiden og besvarelsens sider været klammet sammen med en hæfteklamme i øverste venstre hjørne. Der skal afleveres to eksemplarer, altså en original sammen med en fotokopi.

Opgave 1

I denne opgave betragtes talfølgen (x_n) bestemt ved

$$x_n = \frac{\ln(n+\sqrt{n})}{\ln n + \sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

(a) Begrund, at der for alle $n \geqslant 2$ gælder følgende uligheder:

$$\frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \leqslant x_n \leqslant \frac{2\,\ln n}{\sqrt{n}}\,.$$

(b) Begrund, at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(c) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ er divergent.

(d) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ er konvergent.

Opgave 2

(a) Bestem de komplekse løsninger z til ligningen,

$$(z-2)^6 = z^6.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $z = x + iy$, med eksakte værdier af x og y. [Vink: udnyt fx, at ligningen $w^6 = z^6$ kan omskrives til $(w^3 - z^3)(w^3 + z^3) = 0$ eller, når $z \neq 0$, til $(w/z)^6 = 1$.]

(b) Bestem den numeriske værdi og et argument for hver af løsningerne.

(c) Bestem produktet af løsningerne.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

For hver værdi af tallet k defineres en delmængde T_k af $\mathbb{R}^2$:

$$T_k := \{(x, y) \mid -7 < x \leqslant \tfrac{1}{9}y^2,\ (x+3)^2 + y^2 \leqslant k\}.$$

(a) Skitser T_k for nogle forskellige værdier af k. Skitserne skal illustrere, hvordan formen på T_k ændrer sig med k.

(b) Bestem de værdier af k, for hvilke T_k er konveks.

(c) Bestem de værdier af k, for hvilke T_k er en afsluttet (også kaldet lukket) delmængde af $\mathbb{R}^2$.

(d) Bestem de værdier af k, for hvilke T_k er kompakt.

(e) Løs optimeringsproblemet: Maksimer $y^2 - x^2 + 6x$ for $(x, y) \in T_{25}$.

Opgave 4

Punktet $(x, y, z, w) = (0, 1, 2, -\frac{\pi}{4})$ opfylder ligningen

$$e^{xyz} + xw - 2y^2 + \tan w + 2 = 0\,.$$

(a) Begrund, at ligningen nær dette punkt bestemmer w som en C^1-funktion $w = g(x, y, z)$.

(b) Bestem gradienten $\nabla g\ (0, 1, 2)$.

(c) Begrund, at funktionen $\gamma(t) := g\big(\sin 4t, e^{2t}, t+2\big)$ er en differentiabel funktion defineret i et interval omkring $t = 0$ (dvs for $|t| < \varepsilon$ med et passende positivt tal ε). Angiv funktionsværdien $\gamma(0)$, og bestem differentialkvotienten $\gamma'(0)$.

Opgave 5

Betragt for et givet tal $k \in \mathbb{R}$ følgende lineære program:
(P_k) Minimer $x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4$ under hensyn til bibetingelserne,

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\geqslant 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\geqslant 2k, \end{aligned}$$

og med alle fire variable $x_j \geqslant 0$.

(a) Opstil det duale program $(P_k{}')$.

(b) Skitser mængden af tilladte løsninger til $(P_k{}')$.

(c) Bestem for hver værdi af k en optimal løsning til det duale program $(P_k{}')$.

(d) Opskriv de betingelser, der ifølge Sætning 4.7 [F, side 4.5] (eller Ugeseddel 13) må gælde for koordinaterne til en optimal løsning $\mathbf{x}$ til (P_k).

(e) Løs problemet (P_k).

Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), vinteren 2003–04

Cpr. nr.:______________________

Matematisk analyse og statisk optimering

2. december – 5. december 2003

Opgaven udleveres tirsdag den 2. december kl. 10.00 på MØK-sekretariatet. Opgavebesvarelsen afleveres på MØK-sekretariatet fredag den 5. december 2003, senest kl. 10.00.

Opgavesættet indeholder 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen (Sydsæter, bind II [S], eventuelt til den gamle udgave [S_{gl}]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), eller til ugesedlerne.

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, den skal være renskrevet på enkeltark i A4 format, og den må højst fylde 15 sider ud over forsiden. Denne side (eller en kopi af den) skal anvendes som forside, forsynet med cpr.nr. i øverste højre hjørne og navn og underskrift herunder. Ved afleveringen skal forsiden og besvarelsens sider været klammet sammen med en hæfteklamme i øverste venstre hjørne. Der skal afleveres to eksemplarer, altså en original sammen med en fotokopi.

navn	underskrift

Husk at udfylde: cpr.nr. øverst, og navn og underskrift herover.