Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
3. december – 6. december 2002

Opgaven udleveres tirsdag den 3. december 2002 kl. 10.00 på MØK-sekretariatet. Opgavebesvarelsen afleveres på MØK-sekretariatet fredag den 6. december 2002, senest kl. 10.00.

Opgavesættet indeholder 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen (Sydsæter bind II [S]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), eller til ugesedlerne.

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, den skal være renskrevet på enkeltark i A4 format, og den må højst fylde 15 sider ud over forsiden. Den vedføjede side (eller en kopi af siden) skal anvendes som forside, og den skal udfyldes med cpr.nr. i øverste højre hjørne og navn og underskrift. Ved afleveringen skal forsiden og besvarelsens sider været klammet sammen med en hæfteklamme i øverste venstre hjørne. Der skal afleveres to eksemplarer, altså en original sammen med en fotokopi.

Opgave 1

Bestem for hver af de efterfølgende rækker de positive værdier af tallet k for hvilke rækken er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\Big(k+\frac{1}{n}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(k+\frac{1}{n}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(k+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Bestem dernæst de par (k, a), hvor $k > 0$ og a er et vilkårligt reelt tal, for hvilke følgende række er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}\Big(k+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Opgave 2

(a) Bestem de komplekse løsninger z til ligningen

$$(z^2+2i)^2+2i=0.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $z = x + iy$, med eksakte værdier af x og y.

(b) Angiv (eksakt) de numeriske værdier af løsningerne.

(c) Angiv summen og produktet af løsningerne.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $T \subseteq \mathbb{R}^3$ være delmængden bestående af de punkter (x, y, z), hvis koordinater opfylder følgende fire uligheder:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad \sqrt{3}x + 2y + z \leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

(a) Begrund, at T er kompakt.

(b) Løs følgende maksimeringsproblem: Maksimer funktionen $e^x \sin z$ for $(x, y, z) \in T$.

Opgave 4

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ være delmængden bestående af de punkter (x, y, z), hvis koordinater opfylder følgende betingelser:

$$\begin{aligned} e^x \cos y + e^{-x} \sin z + \sin y - \cos z &= 0, \\ e^x \sin y + e^{-x} \cos z - \cos y - \sin z &= 0, \end{aligned} \qquad |y| \leqslant 6.$$

(a) Vis, at der findes præcis et punkt $(x, y, z) \in S$ med $z = 0$, nemlig punktet $(0, 0, 0)$.

(b) Begrund, at der findes to differentiable funktioner $\varphi(t)$ og $\psi(t)$, definerede i et passende interval omkring $t = 0$, dvs for $-\varepsilon < t < \varepsilon$ med $\varepsilon > 0$, således, at $(\varphi(t), \psi(t), t) \in S$ for $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Angiv værdierne $\varphi(0)$ og $\psi(0)$.

(c) Bestem differentialkvotienterne $\varphi'(0)$ og $\psi'(0)$.

Opgave 5

Betragt for et positivt reelt tal k følgende lineære program på standardform:

(P_k) Maksimer $x - 2y$ under bibetingelserne

$$-x - y \leqslant 6, \qquad y - x \leqslant 4, \qquad (6 - k)x - ky \leqslant 0,$$

og altså $x \geqslant 0$ og $y \geqslant 0$.

(a) Skitser mængden S_k af tilladte løsninger for nogle udvalgte værdier af k. Skitserne skal illustrere de forskellige muligheder for udseendet af S_k.

(b) Bestem de værdier af k for hvilke (P_k) har en maksimal løsning, og angiv for hver af disse værdier af k samtlige maksimale løsninger.

(c) Opstil det duale program $(P_k{}')$.

(d) Bestem de værdier af k for hvilke Dualitetssætningens tilfælde 1. indtræffer for (P_k) og $(P_k{}')$. Besvar det samme spørgsmål for tilfældene 2., 3., og 4.