Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
4. december – 7. december 2001

Opgaven udleveres tirsdag den 4. december 2001 kl. 10.00 på MØK-sekretariatet. Opgavebesvarelsen afleveres på MØK-sekretariatet fredag den 7. december 2001, senest kl. 10.00.

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, den skal være renskrevet, og den må højst fylde 15 sider. Den skal afleveres i to eksemplarer, dvs sammen med en fotokopi.

Opgavesættet indeholder 5 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved vurderingen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede, med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der kan henvises til lærebogen (Sydsæter bind II [S]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), eller til ugesedlerne.

Opgave 1

I denne opgave betragtes talfølgen (x_n) bestemt ved

$$x_n = \frac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2)+n}\,.$$

(1) Begrund, at der for alle $n \geqslant 2$ gælder følgende uligheder:

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{3\,\ln n}{n}\,.$$

(2) Begrund, at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(3) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ er divergent.

(4) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ er konvergent.

Opgave 2

(1) Bestem de komplekse løsninger z til ligningen

$$(z-i)^4 + 4 = 0.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $z = x + iy$, med eksakte værdier af x og y.

(2) Angiv produktet af løsningerne.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

For hver given værdi af tallet a bestemmes en delmængde S_a af $\mathbb{R}^2$:

$$S_a := \{(x, y) \mid y^2 \leqslant x \leqslant 1 + ay^2\}.$$

(1) Skitser S_a for nogle forskellige værdier af a. Skitserne skal illustrere, hvordan formen på S_a ændrer sig med a.

(2) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er konveks.

(3) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er en afsluttet (også kaldet lukket) delmængde af $\mathbb{R}^2$.

(4) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er kompakt.

Opgave 4

Punktet $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ opfylder ligningen

(*) $$x^3 + y^3 + z^3 - xyz - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}y = 1\,.$$

(1) Begrund, at ligningen nær punktet bestemmer z som en (differentiabel) funktion $z = g(x, y)$, altså at der findes en funktion $g(x, y)$ defineret i et rektangel R omkring $(0, 0)$, bestemt ved uligheder,

$$R: \qquad |x| \leqslant \delta,\ \ |y| \leqslant \delta,$$

og et positivt tal ε således, at der for hvert $(x, y) \in R$ findes et og kun et tal z, så $|z - 1| \leqslant \varepsilon$ og ligningen (*) gælder, nemlig $z = g(x, y)$.

(2) Det kan vises, at man i (1) kan tage $\varepsilon = \delta = \frac{1}{2}$. Dette må antages i resten af besvarelsen, og kræves ikke eftervist. Begrund, at funktionen $\varphi(t) = g\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t\right)$ er en differentiabel funktion, defineret for $|t| < 1$, og bestem differentialkvotienten $\varphi'(0)$ svarende til $t = 0$.

Opgave 5

Betragt følgende lineære program på standardform:

(P) Maksimer $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 5x_4$ under hensyn til bibetingelserne,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\leqslant 1, \end{aligned}$$

og med alle fire variable $x_j \geqslant 0$.

(1) Opstil det duale program (P').

(2) Skitser mængden af tilladte løsninger til (P').

(3) Løs det duale program (P').

(4) Opskriv de ligninger, der ifølge Sætning 4.7 [F, side 4.5] må gælde for koordinaterne til en optimal løsning $\mathbf{x}$ til (P).

(5) Løs problemet (P).