Københavns Universitets Institut for Matematiske Fag
Handelshøjskolen i København

MATEMATISK ANALYSE OG STATISK OPTIMERING
Juli 2000

Antal opgaver og vægtning. Der er fem opgaver: $1, 2, \ldots, 5$. Hver af disse består af et antal delopgaver: (a), (b), ..., som hver vægtes med 5% :

Opgave nummer	1	2	3	4	5
Antal delopgaver	3	3	3	6	5
Opgavens vægt	15%	15%	15%	30%	25%

Samarbejde. Opgaverne kan løses i grupper bestående af *højst tre* deltagere, der alle skal deltage i eksamenen. Hver deltager skal individuelt indskrive sin besvarelse.

Erklæring. På besvarelsens første side skal der være *enten* en underskrevet erklæring om samarbejde med hver samarbejdspartners fulde navn *eller* en underskrevet erklæring om, at besvarelsen er helt selvstændigt udarbejdet.

Besvarelsen må højst fylde 20 standardsider (ud over ovennævnte erklæring). Den skal være tydelig, og den skal både være rimelig kort og indeholde udførlige begrundelser.

Henvisninger. Der lægges vægt på, at der gives henvisninger, når der benyttes et resultat fra noterne (angiv side), ugesedlerne (angiv nummer) eller bogen (dvs. Sydsæter bind 2; angiv side eller resultatets navn eller nummer).

Rækkefølge og ny side. Besvar de fem opgaver i rækkefølge: $1, 2, \ldots, 5$. Start hver opgave på en *ny* side. Besvar delspørgsmålene inden for hver opgave i rækkefølge: (a), (b), ...

Antal kopier. Besvarelsen afleveres i *to* kopier.

Opgavesættet starter på næste side

OPGAVE 1 (15 %).

(a) Bestem mængden A af $a \in \mathbb{R}$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n(a^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

(b) Bestem mængden B af $b \in \mathbb{R}$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(b^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

(c) Bestem mængden D af $(k, c) \in \mathbb{R}^2$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^k(c^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

OPGAVE 2 (15 %).

(a) Bestem en polynomiumsligning i $\mathbb{C}$ af lavest mulig grad, med reelle koefficienter og med $i\sqrt{2}$, $1 + i$ og $-1 + i$ som løsninger. Afgør, om $-i\sqrt{2}$ er løsning til denne ligning.

Lad nu g være en reel konstant.

(b) Løs ligningen $z^3 + gz^2 + g^2 z + g^3 = 0$ i $\mathbb{C}$, og angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Løs ligningen $z^6 + g^2 z^4 + g^4 z^2 + g^6 = 0$ i $\mathbb{C}$, og angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

OPGAVE 3 (15 %). Betragt kurven

$$N \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y^2 + y^4 = 0 \},$$

og lad M betegne mængden af punkter $(a, b) \in N$, så N i et passende åbent rektangel om (a, b) definerer y som en C^1–funktion φ af x, sml. også U8.

(a) Skitsér N, og begrund, at punktet $(0, 0)$ ikke tilhører M.

(b) Bestem mængden M.

(c) Bestem $\varphi'(a)$ for ethvert $(a, b) \in M$.

Opgavesættet fortsættes på næste side

OPGAVE 4 (30 %). Betragt mængden

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y \leq x + 2 \leq 2 \text{ og } y^2 \leq 1 + x \,\}\,.$$

(a) Skitsér mængden S. Begrund, at den er lukket, og at den er kompakt.

Betragt ulighederne $x \leq 0$, $-x + 2y \leq 2$ og $-x + y^2 \leq 1$.

(b) Afgør for ethvert $(x, y) \in S$, om **FB** (dvs. FøringsBetingelsen [Sydsæter 2, s. 210], sml. også U12) for disse uligheder er opfyldt i (x, y).

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er funktionen $f_a \colon S \to \mathbb{R}$ givet ved $f_a(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} ax^2 + y^4$ for $(x, y) \in S$, og man betragter det ikke-lineære problem:

$$\textit{Maksimér } f_a(x, y) \textit{ når } (x, y) \in S.$$

(c) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x, y) \in S$ med $x = y^2 - 1 < 0$, om (x, y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB** (dvs. Kuhn–Tuckers Nødvendige Betingelser [Sydsæter 2, s. 210], sml. også U11).

(d)&(e) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x, y) \in S$, hvori **FB** er opfyldt, om (x, y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB**.

(f) Begrund for ethvert $a \in \mathbb{R}$, at f_a har et maksimumspunkt i S, og angiv ethvert af disse og maksimumsværdien.

OPGAVE 5 (25 %). Betragt det generelle lineære program:

(P) *Maksimér* $-x_1 + x_2$
under bibetingelserne $x_1 + x_2 \leq 1$, $3x_2 \leq -1$, $-x_1 - x_2 \leq 1$
og fortegnskravet $x_1 \geq 0$.

(a) Opstil det duale program (P'), og afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(b) Omform (P') til et program (Q) på kanonisk form.

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til programmet (Q), og løs dette.

(d) Løs det duale program (P').

(e) Løs det oprindelige program (P).

Med venlig hilsen
Hans–Bjørn Foxby