**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Handelshøjskolen i København Maj 1999**

# Matematik H1

**Erhvervsøkonomi-matematik studiet**

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

**Opgave 1** (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet $\mathbf{R}^4$ være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Find et maksimalt lineært uafhængigt sæt $M_1$ af $M = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$. Skriv hver af de øvrige vektorer i $M$ som linearkombinationer af vektorerne fra $M_1$.

**(b)** Sæt $U = \operatorname{span} M$. Vis, at sættet bestående af de to vektorer $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_1 + \underline{a}_3$ udgør en basis for $U$.

**(c)** Om en lineær afbildning $f\colon U \to U$ oplyses at $f(\underline{a}_1) = \underline{a}_2$ og $f(\underline{a}_3) = \underline{a}_4$. Bestem matricen for $f$ med hensyn til den i (b) omtalte basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_1 + \underline{a}_3)$.

**Opgave 2** (Vægt 20%)

Lad
$$f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x.$$

**(a)** Vis, at hvert af de to punkter $(x,y) = (-1, \pm\sqrt{15}/2)$ er stationært for $f$.

**(b)** Funktionen $f$ har også to stationære punkter med $x \neq -1$. Bestem disse punkter. (Vink: Udnyt først ligningen $f'_y(x,y) = 0$ til at bestemme $y$.)

**(c)** Bestem Hesse matricen $\underline{\underline{H}}(x,y)$ for $f$ i ethvert punkt $(x,y)$. Udregn denne matrix for hvert af de i (a) og (b) nævnte fire punkter, og bestem typen af disse stationære punkter.

**(d)** Betragt enhedscirkelskiven

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Vis, at $f$ er konveks i $S$, og bestem det punkt i $S$, hvori $f$ antager den mindste værdi.


Opgavesættet fortsættes på side 2

**Opgave 3** (Vægt 5%)

Lad $F(x,y)$ være en funktion af to variable, om hvilken det antages, at de partielle afledede $F_1' = \frac{\partial F}{\partial x}$ og $F_2' = \frac{\partial F}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuerte. Udtryk de partielle afledede af funktionen $z(t,s) = F(t^2 s, t+2s)$ ved $F_1'$ og $F_2'$.

**Opgave 4** (Vægt 20%)

Lad $K$ betegne den kvadratiske form i $\mathbf{R}^3$ givet ved

$$K(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

**(a)** Bestem den til $K$ hørende symmetriske matrix $\underline{\underline{B}}$.

**(b)** Lad $U \subseteq \mathbf{R}^3$ betegne egenrummet for $\underline{\underline{B}}$ svarende til egenværdi 1. Vis, at vektorerne $\underline{a} = (0,1,1)$ og $\underline{b} = (1,2,0)$ tilhører $U$ og udgør en basis for $U$. Bestem dernæst en ortogonal basis for $U$.

**(c)** Bestem det ortogonale komplement $U^\perp$ til $U$, og vis, at dette underrum også er et egenrum for $\underline{\underline{B}}$. Angiv den tilhørende egenværdi.

**(d)** Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ således, at matricen $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Angiv også denne diagonalmatrix.

**Opgave 5** (Vægt 15%)

Lad

$$F(x,y,z) = k\ln(xyz) - x^a y^b z^c, \qquad (x,y,z>0)$$

hvor $a,b,c$ og $k$ er konstanter, og $c \neq k$. Det oplyses (og skal ikke eftervises), at ligningen $F(x,y,z) = -1$ fastlægger $z$ implicit som en differentiabel funktion af $x$ og $y$ i nærheden af punktet $(x_0,y_0) = (1,1)$, med værdien $z_0 = 1$ i dette punkt.

**(a)** Find de første ordens partielle afledede $z_x'$ og $z_y'$ af $z$ i punktet $(1,1)$. Hvad skal konstanterne $a,b$ og $k$ opfylde for at punktet er stationært?

**(b)** Angiv en ligning for tangentplanen i punktet $(1,1,1)$ til den flade i $\mathbf{R}^3$, som ligningen $F(x,y,z) = -1$ bestemmer.

**Opgave 6** (Vægt 15%)

En lineær afbildning $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestem kernen $\ker f$ for $f$.

Opgave 6 fortsættes på side 3

**(b)** Lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet

$$U = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}.$$

Vis, at $\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus U$.

**(c)** Find projektionen af vektoren $\underline{v} = (4, 3, 2, 1)$ på $\ker f$ langs $U$.

**Opgave 7** (Vægt 10%)

Lad $A$ være trekantområdet i $(x, y)$-planen med hjørner $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Skitser $A$. Bestem volumen af legemet over $A$ og under grafen for funktionen $f(x, y) = x^2 e^{y^2}$. (Vink: Det gælder om at integrere med hensyn til $x$ og $y$ i en bestemt rækkefølge. Integralet af funktionen $y^3 e^{y^2}$ kan bestemmes ved substitutionen $t = y^2$ samt udnyttelse af formlen $\int te^t\,dt = te^t - e^t$).