Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet $\mathbf{R}^4$ være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at sættet $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ udgør en basis for $\mathbf{R}^4$.

(b) Lad den lineære afbildning $f\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ være bestemt ved at dens matrix med hensyn til den naturlige basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$ for $\mathbf{R}^5$ og basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ for $\mathbf{R}^4$ er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem matricen for f med hensyn til de naturlige baser $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$ og $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$. (Benyt feks. søjlereglen)

(c) Find den fuldstændige løsning til ligningen $f(\underline{x}) = \underline{a}_1$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^5$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

For $\alpha \in \mathbf{R}$ betragtes 2×2 matricen

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at vektoren $\underline{a}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ er egenvektor for $\underline{\underline{A}}(\alpha)$, og angiv den tilhørende egenværdi.

(b) Find en vektor $\underline{a}_2$, som for alle α er egenvektor for $\underline{\underline{A}}(\alpha)$ med egenværdien 1.

(c) Lad $\alpha \neq 1$. Find en regulær 2×2 matrix $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}(\alpha)$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}(\alpha)$, således at $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$.

(d) Lad nu $\alpha = 1$. Afgør, om $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{b}$ i talrummet $\mathbf{R}^4$ være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor $t \in \mathbf{R}$ er en parameter.

(a) Bestem, for enhver værdi af t, dimensionen af underrummet

$$U = \operatorname{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3).$$

(b) Lad $t = 2$. Bestem en ortogonal basis for U.

(c) Lad stadig $t = 2$. Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{b}$ på U.

Opgave 4 (Vægt 15%)

For enhver værdi af $\beta \in \mathbf{R}$ fastlægger ligningen

$$e^{x+z} + 2(x+z)y + \beta x = 1$$

den variable z som en to gange differentiabel funktion af (x, y) i nærheden af punktet $(x, y) = (0, 0)$. Lad denne funktion være betegnet $z = f(x, y)$.

(a) Bestem $f(0, 0)$.

(b) Vis, at punktet $(0, 0)$ er stationært for f hvis og kun hvis $\beta = -1$.

(c) Lad nu $\beta = -1$. Afgør, om punktet $(0, 0)$ er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt for f.

Opgave 5 (Vægt 10%)

Lad området A i planen være trekanten hvis hjørner har koordinaterne henholdsvis $(0, 0)$, $(2, 0)$ og $(1, 1)$.

(a) Lad $f(x, y)$ være en kontinuert funktion defineret på A. Opstil de to formler for dobbeltintegralet af f over A, svarende til de to integrationsrækkefølger (de konkrete grænser i integralerne skal angives). (Vink: For at opstille den ene af formlerne må området deles i to).

(b) Lad nu $f(x, y) = xy^3$. Udregn dobbeltintegralet af f over A ved hjælp af en af de to formler fra spørgsmål (a).

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt 15%)

Lad
$$f(x,y) = xy$$
og
$$g(x,y) = 20x^2 + 12xy + 5y^2.$$

(a) Bestem definitheden af den kvadratiske form
$$h(x,y) = g(x,y) - (x^2 + y^2) = 19x^2 + 12xy + 4y^2,$$
og vis herved at $h(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(b) Lad $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x,y) = 64\}$. Vis, at for alle $(x,y) \in S$ er afstanden fra (x,y) til $(0,0)$ højst 8 (udnyt feks. resultatet fra spørgsmål (a)). Begrund at funktionen $f(x,y)$ antager både en maksimumsværdi og en minimumsværdi på S.

I det følgende betragter vi problemet: At bestemme de ovennævnte ekstrema for f under bibetingelsen $g(x,y) = 64$.

(c) Opstil Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ der svarer til denne ekstremumsbestemmelse. Vis, at hvert af punkterne $(x,y) = (1,2)$ og $(x,y) = (-1,-2)$ opfylder bibetingelsen og giver anledning til et stationært punkt for $\mathcal{L}$. Værdien af den tilhørende Lagrangemultiplikator λ skal angives (den viser sig at være den samme for de to punkter).

(d) Til værdien $\lambda = -\frac{1}{8}$ af Lagrangemultiplikatoren svarer også to stationære punkter for $\mathcal{L}$. Bestem disse to punkter.

(e) Det oplyses, at der ikke findes andre stationære punkter for $\mathcal{L}$ end de fire ovennævnte. Bestem ved hjælp af denne oplysning maksimum og minimum for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = 64$.