

# Matematik H1

## Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art. Sættet er på 3 sider og består af 8 opgaver som vægtes lige.

### Opgave 1

Lad  $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$  og  $\underline{A}$  være  $4 \times 4$  matricen givet ved

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\underline{Ax} = \underline{0}.$$

(b) Lad  $f$  være den lineære afbildning af  $\mathbb{R}^4$  ind i  $\mathbb{R}^4$  som er givet ved  $\underline{A}$ . Find en basis for  $f$ 's billedrum.

### Opgave 2

For  $c \in \mathbb{R}$  defineres en  $3 \times 3$  matrix  $\underline{A}(c)$ ,

$$\underline{A}(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & c^2 + c \\ c^2 - 2c & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem mængden

$$F = \{c \in \mathbb{R} \mid \underline{A}(c) \text{ har 3 forskellige egenverdier}\}.$$

b) Bestem mængden

$$D = \{c \in \mathbb{R} \mid \underline{A}(c) \text{ kan diagonaliseres}\}.$$

c) Bestem mængden

$$O = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{Der findes en ortonormalbasis for } \mathbb{R}^3 \\ \text{bestående af egenvektorer for } \underline{A}(c)\}.$$

### Opgave 3

I  $\mathbb{R}^3$  er der givet 3 vektorer  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

$$\underline{a}_1 = (0, 1, 1), \quad \underline{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \underline{a}_3 = (1, 1, 0).$$

Der er endvidere givet en lineær afbildning  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som opfylder

$$f(\underline{a}_1) = \underline{a}_2, \quad f(\underline{a}_2) = \underline{a}_3, \quad f(\underline{a}_3) = \underline{a}_1.$$

- Vis, at sættet  $\alpha = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$  udgør en basis for  $\mathbb{R}^3$ .
- Bestem matricen for  $f$  m.h.t. basen  $\alpha$ .
- Bestem matricen for  $f$  m.h.t. den naturlige basis.

### Opgave 4

I  $\mathbb{R}^4$  er der givet vektorerne  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  ved

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 0, 2), \quad \underline{a}_2 = (3, 3, 4, 0), \quad \underline{a}_3 = (8, 1, 4, 4).$$

- Find en ortonormalbasis for  $\text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ .
- Bestem ortogonalprojektionen af  $\underline{v} = (9, 4, -9, -7)$  på  $\text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ .

### Opgave 5

Der er givet 2 funktioner  $f$  og  $g$  på  $\mathbb{R}^3$  ved

$$f(x, y, z) = -x + y + \ln(1 + z^2) \\ g(x, y, z) = x^2 y (1 + z + z^2)^{-1},$$

- Bestem de partielle afledede af 1. orden af både  $f$  og  $g$ .

Ligningerne  $f(x, y, z) = 0$  og  $g(x, y, z) = 1$  fastlægger  $y$  og  $z$  som differentiable funktioner af  $x$

$$y = h(x), \quad z = k(x)$$

i en omegen af punktet  $(1, 1, 0)$ .

- Beregn  $h'(1)$  og  $k'(1)$ .

### Opgave 6

Der er givet funktioner  $f, g, h$  af 3 reelle variable ved

$$f(x, y, z) = (x + 1)^2 + z \\ g(x, y, z) = 2x + 2y + z \\ h(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

Find største- og mindsteværdi for  $f$  under bibetingelserne  $g(x, y, z) = 1$  og  $h(x, y, z) = 1$ .

### Opgave 7

Lad  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være givet ved

$$f(x, y) = (5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 5)(2x - 3y)^2.$$

Det oplyses, at  $(1, 1)$  er et stationært punkt for  $f$ .

- (a) Bestem Taylorpolynomiet for  $f$  af grad 2 i udviklingspunktet  $(1, 1)$ .
- (b) Bestem arten af det stationære punkt  $(1, 1)$ .

### Opgave 8

Lad  $M$  være det begrænsede område i planen som afgrænses af kurverne bestemt ved ligningerne:

$$x = 0, \quad x^2 - y = 0, \quad x^2 + y = 2.$$

- (a) Tegn en skitse af  $M$ .

Lad  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være givet ved

$$f(x, y) = 2xe^y.$$

- (b) Beregn

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy.$$