

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

2. semester

30. maj kl. 9 – 13

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (20 points)

Lad $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, som med hensyn til standardbaserne er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af kernen for f , $\dim \ker f$.
- Bestem en basis for kernen $\ker f$.
- Bestem en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$.
- Lad $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være ortogonalprojektionen på underrummet $f(\mathbb{R}^4)$. Bestem $P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 2 (20 points)

Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$ og betragt matricen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

- Gør rede for, at A kan diagonaliseres.
- Bestem en basis af egenvektorer for A .
- Find en regulær (3×3) matrix T , så

$$D = TAT^{-1}$$

er en diagonalmatrix.

- For hvilke værdier af a , b og c er den til A hørende kvadratiske form positiv semi-definit?

Opgave 3 (10 points)

Lad

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Udregn \underline{A}^{10} .
- Udregn $\underline{A}^2 + \underline{A} - 2\underline{E}$.

Opgave 4 (20 points)

Gør rede for, at funktionen

$$f(x, y) = 2y\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{2}y^2 \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \quad 0 \leq y \leq 3$$

har såvel en største værdi S som en mindste værdi M .

Bestem S og M , og angiv værdimængden for f .

Opgave 5 (15 points)

- Angiv definitionsområdet for funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = -\ln(9 - x^2 - y^2)$$

og vis, at f er konveks.

- Skitsér niveaukurverne for f .
- Gør rede for, at f har såvel maksimum som minimum under bibetingelsen

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

og bestem disse.

Opgave 6 (15 points)

Lad

$$F(x) = \int_x^1 t^2 e^{xt} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Gør rede for, at F er differentiabel.
- Bestem Taylorpolynomiet af grad højst 2 med udviklingspunkt $x = 0$.
Du behøver ikke at redegøre for, at F er 2 gange differentiabel.
- Bestem

$$\int_0^1 F(x) dx,$$

idet du foretager en ombytning af integrationsordenen.