Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet maj 1993

HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

MATEMATIK

2. semester

dato og tidspunkt

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

Opgave 1 (10 points)

Der er givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Bestem egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ og for $\underline{\underline{B}}$.

b) Gør rede for, at der findes en ortogonal matrix $\underline{\underline{T}}$, så $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ er en diagonal matrix.

c) Afgør, om matricen $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ også er en diagonalmatrix. Begrund dit svar.

Opgave 2 (20 points)

Lad

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (1,0,1) \\ \underline{a}_2 &= (1,1,3) \\ \underline{b}\ &= (-1,-2,1) \end{aligned}$$

være 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ og lad $U = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.

a) Vis, at det ortogonale komplement $\{\underline{b}\}^\perp$ er lig med U.

b) Lad $P = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning som til $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ lader svare $\underline{x}$'s ortogonalprojektion på U. Bestem matricen hørende til P med hensyn til basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}$ for $\mathbb{R}^3$.

c) Lad $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ betegne standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Find projektionerne $P(\underline{e}_1), P(\underline{e}_2)), P(\underline{e}_3)$ udtrykt som linearkombinationer af $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$.

d) Bestem matricen for P m.h.t. standard basen $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ for $\mathbb{R}^3$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15 points)

Lad

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + 7y^2 + 5z^2 + 2xy + 6xz + 2yz \ .$$

a. Bestem om Q er positiv definit, negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit eller indefinit.

b.) Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, hvor $\underline{\underline{A}}$ har egenværdien 6.

c. Bestem et talsæt $(\alpha, \beta, \nu) \neq (0,0,0)$, så

$$Q(\alpha, \beta, \nu) = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \nu^2) \ .$$

Opgave 4 (15 points)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$A = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 1 \ , \ \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \sqrt{2x}\} \ .$$

a) Skitsér mængden A.

b) Lad

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x \qquad ((x,y) \in A) \ .$$

Godtgør, at f antager en største og en mindste værdi på A og bestem disse.

c) Udregn værdien af integralet

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \ .$$

Opgave 5 (10 points)

Ligningen

$$(\mathcal{D}) \qquad x^3 + y^3 = 3xy$$

bestemmer en graf i $\mathbb{R}^2$.

a. Find skæringspunktet $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ med grafen for ligningen $y = x$.

b. I et interval omkring x_0 fastlægger $(\mathcal{D})\, y$ som en funktion af $x, y = f(x)$. Bestem 2. Taylor polynomium for f.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (20 points)

En funktion er i området $x \geq 0$, $y \geq 0$ givet ved forskriften

$$f(x,y) = x^{1/3}y^{1/2} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \ .$$

a. Bestem eventuelle stationære punkter for f.
b. Udregn Hessematricen for f i et vilkårligt punkt og godtgør, at f har globalt maksimum.

   Bestem dette.
c. Find dernæst ekstrema for f under bibetingelsen $3y + 2x = 20$.

Opgave 7 (10 points)

Skriv følgende polynomium som et produkt af førstegradspolynomier med reelle/kompak te rødder

$$x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 \ .$$

Udregn dernæst produktet

$$(x-1)(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+1)(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) \ .$$